Черников Алексей Ильич

Биномиальная Алгебра

Москва 2007 год

Предисловие.

Открыт новый тип многочлена - биномиальный. Рассматривается его образование, теория, свойства и применение.

В первой части дана теория биномиального многочлена, во второй - его применение к решению различных вопросов математики. Биномиальный многочлен дает математическую связь между членом данной числовой последовательности и всеми ее предыдущими членами. Отсюда следует, что все числовые последовательности являются возвратными. Всегда можно выразить $k-$ный член последовательности через ее предыдущие члены.

Членами исследуемых числовых последовательностей для биномиальной алгебры являются рациональные числа.

Биномиальный многочлен решает некоторые вопросы, считающиеся трудными для современной теории чисел. Например, он дает формулу простого числа (формула 3.2), т.е. выражает зависимость простого числа от его порядкового номера в таблице простых чисел; дает формулы простых чисел близнецов, как пары (3.5), так и первые числа в парах (3.6); или вторые числа в парах (3.7); дает формулы, выражающие $k-$ ые цифры в числах π (3.8); $L = 2,7183...$ (3.9), даёт формулы для любого иррационального числа, дающие его цифры в зависимости от порядковых номеров последних, например, для числа $\sqrt{2}$ он даёт формулу 3.10.

Однако,все эти формулы полезны для теории и бесполезны для практики. Все остальные формулы биномиальной алгебры полезны как для теории, так и для практики. Например, она даёт новые формулы для арифметической и геометрической прогрессий (формулы 2.12 и 3.18), любую числовую последовательность она выражает биномиальным или алгебраическим многочленом, например, для ряда простых чисел $y_k = 101,103,107,109,113$ даёт биномиальный многочлен $y_k = 101 + 2C_{k-1}^1 + 2C_{k-1}^2 - 4C_{k-1}^3 + 8C_{k-1}^4$, который даёт эти числа при соответствующем k.

Этот биномиальный многочлен преобразуется в алгебраический.

$$y_k = \frac{k^4}{3} - 4k^3 + \frac{50}{3}k^2 - 25k + 113$$

Так можно создавать как биномиальный, так и алгебраический многочлен для любой числовой последовательности или для любого её отрезка. Отсюда следует, что любую формулу (тригонометрическую, логарифмическую, потенциальную и др.) на заданном отрезке можно преобразовать сперва в биномиальный, а затем и в алгебраический многочлен, а алгебраический многочлен или одночлен преобразовать в биномиальный, например, $k^2 = 1 + 3C_{k-1}^1 + 2C_{k-1}^2$, $k^3 = 1 + 7C_{k-1}^3 + 12C_{k-1}^2 + 6C_{k-1}^3$ и т. д.

Для любого графика,или для любого его отрезка, биномиальная алгебра даёт соответствующий биномиальный или алгебраический многочлен.

Особенно полезна будет биномиальная алгебра в исчислении конечных разностей, которая является их развитием.

Из биномиального многочлена неизбежно появляется новый тип уравнения - биномиальный. Теперь неизвестное k будет находиться в биномиальных коэффициентах. При помощи биномиального уравнения можно решать алгебраическое с любым показателем степени (главы 8,9)

Биномиальная алгебра даёт формулы для определения сумм всех членов последовательности от порядковых номеров $k = 1$ до $k = p$ или от k до $k + p$ (теоремы 2.4, 2.6 - 2.8)

В главе 14 рекомендуется новый способ вычисления неберущихся определённых интегралов, более эффективный,чем метод Симпсона.

Несомненно, биномиальная алгебра окажет существенную помощь при исследовании новых тем в различных областях науки и техники.

Часть 1.

Глава 1. Биномиальные коэффициенты.

В главе излагается материал, в основном известный в математике.

Определение1.1. Числа

$$C_k^n = \frac{k!}{n!(k-n)!} \tag{1.1}$$

$(k = 0,1,2,...,n = 0,1,2,...,k \geq n)$, называются биномиальными коэффициентами. Условное обозначение C_k^n, причем n называется верхним индексом, а k – нижним.

$$\text{Пусть } k = n + m \qquad (1.2.)$$

$$\text{Тогда: } C_k^n = C_{n+m}^n = \frac{(n+m)!}{n!m!} \qquad (1.3.)$$

В математике известна таблица биномиальных коэффициентов в виде треугольника Паскаля. Эта таблица являеться крайне неудобной для практического применения, поэтому биномиальные коэффициенты дадим в виде четырёхугольной таблицы.

Таблица 1.1.

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1	1	1	1	1	1	1	...
1	1	2	3	4	5	6	7	...
2	1	3	6	10	15	21	28	...
3	1	4	10	20	35	56	84	...
4	1	5	15	35	70	126	210	...
5	1	6	21	56	126	252	462	...
6	1	7	28	84	210	462	924	...
7	1	8	36	120	330	792	1716	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Эта же таблица в символах:

Таблица 1.2.

$m \setminus n$	0	1	2	3	...	$n-1$	n	...
0	C_0^0	C_1^1	C_2^2	C_3^3	...	C_{n-1}^{n-1}	C_n^n	...
1	C_1^0	C_2^1	C_3^2	C_4^3	...	C_n^{n-1}	C_{n+1}^n	...
2	C_2^0	C_3^1	C_4^2	C_5^3	...	C_{n+1}^{n-1}	C_{n+2}^n	...
3	C_3^0	C_4^1	C_5^2	C_6^3	...	C_{n+2}^{n-1}	C_{n+3}^n	...
4	C_4^0	C_5^1	C_6^2	C_7^3	...	C_{n+3}^{n-1}	C_{n+4}^n	...
5	C_5^0	C_6^1	C_7^2	C_8^3	...	C_{n+4}^{n-1}	C_{n+5}^n	...
6	C_6^0	C_7^1	C_8^2	C_9^3	...	C_{n+5}^{n-1}	C_{n+6}^n	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	C_m^0	C_{m+1}^1	C_{m+2}^2	C_{m+3}^3	...	C_{k-1}^{n-1}	C_k^n	...
$m+1$	C_{m+1}^0	C_{m+2}^1	C_{m+3}^2	C_{m+4}^3	...	C_k^{n-1}	C_{k+1}^n	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Таблица 1.2 является треугольником Паскаля, повёрнутым против часовой стрелки на угол 45^0. Индексы n и m биномиального коэффициента C_{n+m}^n являются его координатами в таблице 1.2. Взаимосвязь между C_{n+m}^n и его координатами выражаеться формулой 1.3.

Основные свойства таблицы C_{n+m}^n.

1) Таблица бесконечна по горизонтали $(n \to \infty)$ и по вертикали $(m \to \infty)$.

2) Каждый член $C_k^n = C_{n+m}^n$ в таблице имеет точные координаты n и m.

3) Строка n равна столбцу m.

4) Основное свойство таблицы: $C_k^n = C_{k-1}^n + C_{k-1}^{n-1}$ (1.4)

5) $C_{n+m}^n = C_{m+n}^m$ (1.5)

6) $C_n^n = 1$ (1.6)

7) $C_m^0 = 1$ (1.7)

8) $C_0^0 = 1$ (1.8)

Легко доказываются следующие формулы:

9) $C_{n+1}^{n} = n+1$ (1.9)

10) $C_{m+1}^{1} = m+1$ (1.10)

11) $C_{n}^{n} = C_{n+t}^{n+t} = C_{n-p}^{n-p}$ (11.1)

12) $C_{k}^{1} + 1 = C_{k+1}^{1}$ (1.12)

13) $C_{k}^{n} + 1 = C_{k}^{k-n}$, $(k \geq n)$ (1.13)

14) $C_{k+1}^{2} - C_{k}^{2} = k$ (1.14)

15) $C_{n-r}^{n-r} = C_{n-t}^{r-t}$, $(n \geq r \geq t)$ (1.15)

16) При целом t и $t \leq k-n$

$C_{k}^{n} = C_{k-t}^{n} + C_{k-t}^{n-1} + C_{k-t+1}^{n-1} + C_{k-t+2}^{n-1} + ... + C_{k-1}^{n-1}$ (1.16)

17) $C_{k-1}^{2} = \dfrac{(k-2)(k-1)}{1 \cdot 2}$ (1.17)

18) $C_{k-1}^{3} = \dfrac{(k-3)(k-2)(k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ (1.18)

19) $C_{k-1}^{n} = \dfrac{(k-n)(k-n+1)...(k-1)}{n!}$ (1.19)

20) $C_{k-1}^{n} = C_{k}^{n} \cdot \dfrac{k+1}{k-n+1}$ (1.20)

21) $C_{k}^{n-1} = C_{k}^{n} \cdot \dfrac{n}{k-n+1}$ (1.21)

22) $C_{k}^{n} = C_{k}^{n-1} \cdot \dfrac{k-n+1}{n}$ (1.22)

23) $C_{k}^{n+1} - C_{k}^{n} = C_{k}^{n} \cdot \dfrac{k-2n-1}{n+1}$ (1.23)

24) $C_{k+1}^{n} - C_{k}^{n} = C_{k}^{n} \cdot \dfrac{n}{k-n+1}$ (1.24)

25) $C_{k+1}^{n} - C_{k}^{n} = C_{k}^{n} \cdot \dfrac{k!}{(n-1)!(k-n+1)!}$ (1.25)

26) $C_{n+m}^{n} = C_{n-1}^{n-1} + C_{n}^{n-1} + C_{n+1}^{n-1} + C_{n+2}^{n-1} + ... + C_{n+m-1}^{n-1}$ (1.26)

27) $C_{n+m}^{n} \cdot C_{n+m+a}^{a} \cdot C_{n+m+a+b}^{b} ... C_{n+m+a+b+...+c}^{c} = \dfrac{(n+m+a+b+...+c)!}{n!m!a!b!...c!}$ (1.27)

при $k > n$

28) $k! > (k-n)!n!$ (1.28)

29) $k! = (k-n)!(k-n+1)(k-n+2)...k$ (1.29)

30) $k! \pm n! = n!\left[(n+1)(n+2)...k \pm 1\right]$ (1.30)

31) $\underbrace{k!k!...k!}_{p} = (k!)^{p}$ (1.31)

32) $k!n! = (n!)^{2}(n+1)(n+2)...k$ (1.32)

33) $\dfrac{k!}{n!} = (n+1)(n+2)...k$ (1.33)

34) $(k-1)!(k-2)...(k-n)! = \left[(k-n)!\right]^n (k-n+1)^{n-1} \cdot (k-n+2)^{n-2} ...(k-1)$ (1.34)

при $k > n$, $v = 1,2,3,...$

35) $C_{k+v}^{n} = C_k^n \cdot \dfrac{(k+1)(k+2)...(k+v)}{(k-n+1)(k-n+2)...(k-n+v)}$ (1.35)

36) $C_{k+v}^{n} = \dfrac{(k-n-v+1)(k-n-v+2)...(k+v)}{n!}$ (1.36)

37) $C_{k-v}^{n-v} = \dfrac{(n-v+1)(n-v+2)...(k-v)}{n!}$ (1.37)

Глава 2. Ранговая система последовательностей.

Определение 2.1. Числовой последовательностью называется функция, заданная на множестве действительных чисел, числовые значения которой поставлены во взаимно-однозначное соответствие с натуральным рядом.

Числа, входящие в состав числовой последовательности, называются её членами.

Числовая последовательность имеет первый член y_1, приведённый во взаимно-однозначное соответствие с натуральным числом $k=1$, второй член y_2, приведённый во взаимно-однозначное соответсвие с натуральным числом $k=2$ и т.д., $k-$ный член y_k, приведённый во взаимно-однозначное соответствие с натуральным числом k. Натуральное число k, поставленное во взаимно-однозначное соответствие с членом y_k, называется его номером.

Каждый член последовательности имеет один и только один номер, отличный от номеров остальных членов последовательности.

Условное обозначенit числовой последовательности:

$$\{y_k\} = y_1, y_2, ..., y_k, ... \tag{2.1}$$

в которой y_1 – первый член, $y_k -$ $k-$ный член, $k-$ номер члена.

Если (2.1) нужно показать только в виде левой части, то применяется символ$\{y_k\}$. Он означает, что$\{y_k\}$ есть числовая последовательность (2.1), а не её отдельный член y_k.

Числовая последовательность считается заданной, если указан способ определения её $k-$ного члена $(k=1,2,3,...)$: дана формула общего члена y_k, указан алгоритм определения y_k или даны члены последовательности (2.1).

Члены числовой последовательности всегда представлены действительными числами.

Определение 2.2. Множество членов последовательности называется её длиной.

Определение 2.3. Последовательность, множество членов которой ограничено, называется конечной.

Определение 2.4. Последовательность, множество членов которой не ограничено, называется бесконечной.

Определение 2.5. Разность между последующим y_{k+1} и предыдущим y_k членами последовательности $\{y_k\}$:

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k \tag{2.2}$$

называется $k-$ной разностью последовательности.

Разность (2.2) последовательности всегда представлена действительным числом.

Разности между соседними членами одной последователности по всей её длине могут быть как равными, так и не равными.

Возьмём последовательность (2.1). Составим ниже её новую последовательность из разности первой:

$$\Delta y_k = \Delta y_1; \Delta y_2; ...; \Delta y_k; ...$$

ниже второй последовательности – третью из разностей второй:

$$\Delta^2 y_k = \Delta^2 y_1; \Delta^2 y_2; ...; \Delta^2 y_k; ...;$$

ниже третьей – четвёртую и т.д. Получим систему последовательностей, исходящихся из первой (2.1) по формуле (2.2):

$$
\begin{aligned}
&y_k = y_1; y_2; ...; y_k; ...;\\
&\Delta y_k = \Delta y_1; \Delta y_2; ...; \Delta y_k; ...;\\
&\Delta^2 y_k = \Delta^2 y_1; \Delta^2 y_2; ...; \Delta^2 y_k; ...;\\
&...\\
&\Delta^p y_k = \Delta^p y_1; \Delta^p y_2; ...; \Delta^p y_k; ...
\end{aligned}
\qquad (2.3)
$$

Определение 2.6. Две и более последовательности системы (2.3) называются разностными, если каждый член $\Delta^p y_k$ следующей последовательности $\left\{\Delta^p y_k\right\}$ является разностью для соответствующих членов предыдущей $\left\{\Delta^{p-1} y_k\right\}$:

$$
\Delta^p y_k = \Delta^{p-1} y_{k+1} - \Delta^{p-1} y_k \qquad (2.4)
$$

Формула (2.2) есть частный случай формулы (2.4).

Разностные последовательности представляют собой систему последовательностей, взаимосвязанных общим алгоритмом построения – формулой (2.4).

Определение 2.7. Совокупность разностных последовательностей, образованных из последовательности $\left\{y_k\right\}$ при помощи формулы (2.4), называется системой разностных последовательностей или ранговой системой.

Ранговая система отличается от таблицы разностей. Ранговая система (2.3) есть таблица разностей, повёрнутая на 90^0, т.е. у которой столбцы превратились в строки, а строки – в столбцы.

Общий вид ранговой системы представлен системой (2.3).

Последовательности в ранговой системе, как и их члены, имеют номера.

Определение 2.8. Порядковый номер p $(p = 0,1,2,...)$ последовательности $\left\{\Delta^p y_k\right\}$ в ранговой системе (2.3) называется порядком последовательности.

Условное обозначение $-p$.

Последовательность $\left\{y_k\right\}$ будет последовательностью нулевого порядка $(p = 0)$, $\left\{\Delta y_k\right\}$ – первого порядка $(p = 1)$ и т.д.

Определение 2.9. Последовательность нулевого порядка называется нуль-последовательностью.

Условное обозначение y_k или $\left\{y_k\right\}$.

Определение 2.10. В ранговой системе (2.3) по отношению к последовательности $\left\{\Delta^p y_k\right\}$ последовательность $\left\{\Delta^{p-t} y_k\right\}(t = 1,2,3,...)$ называеться надпоследовательностью, а последовательность $\left\{\Delta^{p+t} y_k\right\}$ – подпоследовательностью.

Понятия “надпоследовательность” и “подпоследовательность” относительны. Одна и та же последовательность будет надпоследовательностью для всех нижележащих и подпоследовательностью для всех вышележащих последовательностей.

Определение 2.11. Множество подпоследовательностей последовательности называется $\left\{y_k\right\}$ её рангом.

Условное обозначение $-r$.

Последовательность, имеющая r подпоследовательностей, условно обозначается символом $y_{k.r}$ или $\left\{y_{k.r}\right\}$. Обычно указывать ранг r системы нет необходимости, и тогда нуль-последовательность обозначаеться прежними символами – y_k или $\left\{y_k\right\}$.

В ранговой системе последовательность $\left\{\Delta^p y_{k(r-p)}\right\}$ имеет p надпоследовательностей и $r-p$ подпоследовательностей. Последовательность $\left\{y_{k.r}\right\}$ имеет r подпоследовательностей и ни одной надподпоследовательности. Последовательность $\left\{\Delta^r y_{k(r-r)}\right\}$ имеет r надподпоследовательностей и ни одной подпоследовательности.

Наибольший ранг r имеет нуль-последовательность, наименьший – последовательность наибольшего порядка.

Определение 2.12. Ранг нуль-последовательности называется рангом ранговой системы.

Как ранг $r-p$, так и порядок p однозначно определяют место последовательности $\left\{\Delta^p y_{k(r-p)}\right\}$ в ранговой системе (2.3)

Определение 2.13. Если ранг r последовательности или системы представлен конечным множеством, то последовательность или система (2.3) называеться конечноранговой, если бесконечным множеством, то – бесконечноранговой.

Определение 2.14. Номер k члена $\Delta^p y_k$ и порядок p его последовательности называются координатами члена $\Delta^p y_k$ в ранговой системе.

Каждому члену $\Delta^p y_k$ в ранговой системе соответсвует единственное место, определяемое координатами k и p. Координаты k и p и члены $\Delta^p y_k$ всех последовательностей ранговой системы поставлены во взаимно-однозначное соответствие.

Определение 2.15. Если разность по всей длине последовательности не изменяется, то она называется постоянной, если изменяется, то – переменной.

Определение 2.16. Последовательность

$$\left\{d\right\} = d, d, ..., d, ..., d, ...,$$

состоящая из равных членов $d \neq 0$, называется постоянной.

Разностью постоянной последовательности являеться нуль. Последовательность, состоящая из нулей, не имеет практического и теоретического значения, поэтому она не рассматривается.

Постоянная последовательность $\left\{d\right\}$ в ранговой системе (2.3) является подпоследовательностью r – ного порядка $(p=r)$ и имеет нулевой ранг $(r=0)$.

Определение 2.17. Последовательность с постоянной разностью $d \neq 0$

$$\begin{aligned} y_{k.1} = y_1; y_2; ...; y_k; ... \\ d;\ d;\ ...; d; ... \end{aligned} \qquad (2.5)$$

называется арифметической прогрессией.

Арифметическая прогрессия $y_{k.1}$ с разностью d и постоянная последовательность $\left\{d\right\}$ представляет собою простейшую ранговую систему $(r=1)$.

Последовательность, переменной разностью которой являются члены арифметической прогрессии, являются системой второго ранга:

$$\begin{aligned} y_{k.2} = \quad & y_k;\; y_2;\ldots;\; y_k;\ldots \\ & \Delta y_1;\Delta y_2;\ldots;\Delta y_k;\ldots \\ & d;\; d;\ldots;\; d;\ldots \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Последовательность, переменной разностью которой являются члены последовательности $r -$ ного ранга, имеет ранговую систему $(r+1) -$ го ранга.

Если задана последовательность y_k , то тем самым задана и её ранговая система. Из одной последовательности нельзя получить даже две разные ранговые системы, потому что разность (абсолютная) между двумя числами существует только одна.

Теорема 2.1. Член y_k нуль-последовательности:

$$y_k = y_1; y_2;\ldots; y_k;\ldots$$

равен:

$$y_k = y_1 + \Delta y_1 C_{k-1}^1 + \Delta^2 y_1 C_{k-1}^2 + \ldots + \Delta^p y_1 C_{k-1}^p + \ldots + \Delta^{k-1} y_1 C_{k-1}^{k-1} \qquad (2.7)$$

где:

$$\Delta^p y_1 = \Delta^{p-1} y_2 - \Delta^{p-1} y_1 \qquad (2.8)$$

$\Delta y_1; \Delta^2 y_1;\ldots;\Delta^{k-1} y_1$ – первые разности подпоследовательностей ранговой системы,

$C_{k-1}^1; C_{k-1}^2;\ldots; C_{k-1}^p;\ldots; C_{k-1}^{k-1}$ – биномиальные коэффициенты.

Доказательство. Заметим, что формула (2.8) есть формула (2.4) при $k=1$. Из неё сразу следует $(p=1)$: $y_2 = y_1 + \Delta y_1 = y_1 + \Delta y_1 C_{2-1}^1$.

При $p=1$ и $k=2$ из (2.4) получаем:

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2; y_3 = y_2 + \Delta y_2 = (y_1 + \Delta y_1 C_{2-1}^1) + \Delta y_2 .$$

Определим Δy_2 из (2.4) при $p=2$, $k=1$:

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 ,$$

получаем:

$$\Delta y_2 = \Delta y_1 + \Delta^2 y_1 .$$

Подставим в y_3 :

$$y_3 = (y_1 + \Delta y_1 C_{2-1}^1) + \Delta y_2 = y_1 + \Delta y_1 + \Delta y_1 + \Delta^2 y_1 = y_1 + 2\Delta y_1 + \Delta^2 y_1 = y_1 + C_{3-1}^1 \cdot \Delta y_1 + \Delta^2 y_1 \cdot C_{3-1}^{3-1}$$

Теорема верна при $k = 1,2,3$.. Допустим, что она верна и для $k-1$. Тогда:

$$y_{k-1} = y_1 + \Delta y_1 C_{k-2}^1 + \Delta^2 y_1 C_{k-2}^2 + \Delta^3 y_1 C_{k-2}^3 + \ldots + \Delta^p y_1 C_{k-2}^p + \ldots + \Delta^{k-2} y_1 C_{k-2}^{k-2} \cdot \Delta y_{k-1} =$$
$$= \Delta y_1 + \Delta^2 y_1 C_{k-2}^1 + \Delta^3 y_1 C_{k-2}^2 + \ldots + \Delta^p y_1 C_{k-2}^{p-1} + \ldots + \Delta^{k-2} y_1 C_{k-2}^{k-3} + \Delta^{k-1} y_1 C_{k-2}^{k-2}$$

Докажем, что теорема будет верна и для k .

Из (2.4) получаем $(p=1)$:

$$y_k = y_{k-1} + \Delta y_{k-1} = (y_1 + \Delta y_1 C^1_{k-2} + \Delta^2 y_1 C^2_{k-2} + \Delta^3 y_1 C^3_{k-2} + ... + \Delta^p y_1 C^p_{k-2} + ... + \Delta^{k-2} y_1 C^{k-2}_{k-2}) +$$
$$+(\Delta y_1 + \Delta^2 y_1 C^1_{k-2} + \Delta^3 y_1 C^2_{k-2} + ... + \Delta^p y_1 C^{p-1}_{k-2} + ... + \Delta^{k-2} y_1 C^{k-3}_{k-2} + \Delta^{k-1} y_1 C^{k-2}_{k-2}) =$$
$$= y_1 + \Delta y_1 (C^1_{k-2} + 1) + \Delta^2 y_1 (C^2_{k-2} + C^1_{k-2}) + \Delta^3 y_1 (C^3_{k-2} + C^2_{k-2}) + ... + \Delta^p y_1 (C^p_{k-2} + C^{p-1}_{k-2}) +$$
$$+....+ \Delta^{k-2} y_1 (C^{k-2}_{k-2} + C^{k-3}_{k-2}) + \Delta^{k-1} y_1 C^{k-2}_{k-2} = y_1 + \Delta y_1 C^1_{k-1} + \Delta^2 y_1 C^2_{k-1} + \Delta^3 y_1 C^3_{k-1} + ... + \Delta^p y_1 C^p_{k-1} +$$
$$+...+ \Delta^{k-1} y_1 C^{k-1}_{k-1}$$

где

$$C^p_{k-2} + C^{p-1}_{k-2} = C^p_{k-1}$$

в силу формулы (1.4*)

Следствие 2.1.1.

$$\Delta^p y_k = \Delta^p y_1 + \Delta^{p+1} y_1 C^1_{k-1} + \Delta^{p+2} y_1 C^2_{k-1} + ... + \Delta^{p+t} y_1 C^t_{k-1} + ... + \Delta^{p-k+1} y_1 C^{k-1}_{k-1} \quad (2.9)$$

Формула (2.9) определяет числовое значение любого члена ранговой системы (2.3)

Формула (2.7) имеет силу для конечно- и бесконечноранговых последовательностей. Для конечноранговых последовательностей она преобразуеться в формулу 2.10.

Теорема 2.2. Член y_k конечноранговой последовательности

$$y_{k.r} = y_1; y_2; ...; y_k; ...$$

при $k \geq r+1$ равен:

$$y_k = y_1 + \Delta y_1 C^1_{k-1} + \Delta^2 y_1 C^2_{k-1} + ... + \Delta^p y_1 C^p_{k-1} + ... + \Delta^{r-1} y_1 C^{r-1}_{k-1} + dC^r_{k-1} \quad (2.10)$$

Доказательство. Конечноранговая последовательность с рангом r имеет ранговую систему из r подпоследовательностей с переменной разностью и одной постоянной последовательности $\{d\}$, итого $r+1$ последовательностей. Следовательно, при $k=r+1$ член

$$\Delta^{k-2} y_1 C^{k-2}_{k-1} = \Delta^{r-1} y_1 C^{r-1}_{k-1}, \text{ а } \Delta^{k-1} y_1 C^{k-1}_{k-1} = \Delta^r y_1 C^r_{k-1} = dC^r_{k-1}.$$

и формула 2.7 при $k \geq r+1$ преобразуеться в формулу 2.10*

Следствие 2.2.1

$$\Delta^p y_k = \Delta^p y_1 + \Delta^{p+1} y_1 C^1_{k-1} + \Delta^{p+2} y_1 C^2_{k-1} + ... + \Delta^{r-1} y_1 C^{r-p-1}_{k-1} + dC^{r-p}_{k-1} \quad (2.11)$$

Следствие 2.2.2. k – ный член арифметической прогрессии равен:

$$y_{k.1} = y_1 + dC^1_{k-1} \quad (2.12)$$

Следствие 2.2.3.

$$y_{k.2} = y_1 + \Delta y_1 C^1_{k-1} + dC^2_{k-1} \quad (2.13)$$

Следствие 2.2.4.

$$y_{k.3} = y_1 + \Delta y_1 C^1_{k-1} + \Delta^2 y_1 C^2_{k-1} + dC^3_{k-1} \quad (2.14)$$

Следствие 2.2.5.

$$y_{k.4} = y_1 + \Delta y_1 C^1_{k-1} + \Delta^2 y_1 C^2_{k-1} + \Delta^3 y_1 C^3_{k-1} + dC^4_{k-1} \quad (2.15)$$

----

* - конец доказательства

Чтобы задать числовую последовательность ранга r, достаточно указать первые r членов этой последовательности; чтобы задать бесконечноранговую последовательность, необходимо дать алгоритм образования её членов.

Теорема 2.3.

$$\Delta^p y_k = y_{k+p}C_p^0 - y_{k+p-1}C_p^1 + y_{k+p-2}C_p^2 + ... + (-1)^t y_{k+p-t}C_p^t + ... + (-1)^p y_1 C_p^p \tag{2.16}$$

Формула 2.16 известна и доказана в учебниках по исчислению конечных разностей, поэтому доказательство опускаем, покажем лишь следствия.

Следствие 2.3.1.

$$\Delta^p y_1 = y_{p+1} - y_p C_p^1 + y_{p-1}C_p^2 + ... + (-1)^t y_{p-t+1}C_p^t + ... + (-1)^p y_1 C_p^p \tag{2.17}$$

Следствие 2.3.2. Член d постоянной $\{d\}$ в ранговой системе 2.3 равен:

$$d = y_{r+1} - y_r C_r^1 + y_{r-1}C_r^2 + ... + (-1)^t y_{r-t+1}C_r^t + ... + (-1)^r y_k C_r^r \tag{2.18}$$

Следствие 2.3.3. Из равенства 2.9 = 2.16 получаем:

$$\Delta^p y_1 + \Delta^{p+1} y_1 C_{k-1}^1 + ... + \Delta^{p+t} y_1 C_{k-t}^t + ... + \Delta^{p-k+1} y_1 C_{k-1}^{k-1} =$$
$$= y_{k+p}C_p^0 - y_{k+p-1}C_p^1 + ... + (-1)^t y_{k+p-t}C_p^t + ... + (-1)^k y_k C_p^p \tag{2.19}$$

Пусть дана ранговая система $\{y_k\}$ (2.3). Обозначим через S_k сумму первых k – ных членов последовательности $\{y_k\}$, через S_k^p – сумму первых k – ных членов подпоследовательности $\{\Delta^p y_k\}$:

$$S_k = y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_k;$$
$$S_k^p = \Delta^p y_1 + \Delta^p y_2 + \Delta^p y_3 + ... + \Delta^p y_k$$

Теорема 2.4. Если дана бесконечноранговая система 2.3, то:

$$S_k = y_1 C_k^1 + \Delta y_1 C_k^2 + \Delta^2 y_1 C_k^3 + ... + \Delta^p y_1 C_k^{p+1} + ... + \Delta^{k-1} y_1 C_k^k \tag{2.20}$$

Доказательство. Используя (2.7) и (1.26), получим:

$$S_k = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + ... + y_p + y_{p+1} + ... + y_k = y_1 + (y_1 + \Delta y_1 C_1^1) + (y_1 + \Delta y_1 C_2^1 + \Delta^2 y_1 C_2^2) +$$
$$+(y_1 + \Delta y_1 C_3^1 + \Delta^2 y_1 C_3^2 + \Delta^3 y_1 C_3^3) + ... + (y_1 + \Delta y_1 C_p^1 + \Delta^2 y_1 C_p^2 + ... + \Delta^p y_1 C_p^p) +$$
$$+(y_1 + \Delta y_1 C_{p+1}^1 + \Delta^2 y_1 C_{p+1}^2 + ... + \Delta^p y_1 C_{p+1}^p + \Delta^{p+1} y_1 C_{p+1}^{p+1}) +$$
$$+.... + (y_1 + \Delta y_1 C_{k-1}^1 + \Delta^2 y_1 C_{k-1}^2 + ... + \Delta^p y_1 C_{k-1}^p + ... + \Delta^{k-1} y_1 C_{k-1}^{k-1}) =$$
$$= y_1 \underbrace{(1 + 1 + ... + 1)}_{k} + \Delta y_1 (C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 + ... + C_p^1 + ... + C_{k-1}^1) + \Delta^2 y_1 (C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + ... + C_p^2 +$$
$$+ ... + C_{k-1}^2) + ... + \Delta^p y_1 (C_p^p + C_{p+1}^p + ... + C_{k-1}^p) + ... + \Delta^{k-1} y_1 C_{k-1}^{k-1} =$$
$$= y_1 C_k^1 + \Delta y_1 C_k^2 + \Delta^2 y_1 C_k^3 + ... + \Delta^p y_1 C_k^{p+1} + ... + \Delta^{k-1} y_1 C_k^k$$

где

$$C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + ... + C_{k-1}^p = C_k^{p+1} \tag{1.26}$$
$$C_{k-1}^{k-1} = C_k^k \tag{1.6}$$

Следствие 2.4.1.

$$S_k^p = \Delta^p y_1 C_k^1 + \Delta^{p+1} y_1 C_k^2 + \Delta^{p+2} y_1 C_k^3 + \ldots + \Delta^{p+t} y_1 C_k^{t+1} + \ldots + \Delta^{k-1} y_1 C_k^k \qquad (2.21)$$

Теорема 2.5. В ранговой системе (2.3)

$$y_k = y_1 + S_{k-1}^1 \qquad (2.22)$$

где S_{k-1}^1 – сумма членов подпоследовательности на отрезке $[1; k-1]$.

Доказательство.

$$y_k = y_1 + (\Delta y_1 C_{k-1}^1 + \Delta^2 y_1 C_{k-1}^2 + \ldots + \Delta^p y_1 C_{k-1}^p + \ldots + \Delta^{k-2} y_1 C_{k-1}^{k-2} + \Delta^{k-1} y_1 C_{k-1}^{k-1}) = y_1 + S_{k-1}^1,$$

поскольку

$$\Delta y_1 C_{k-1}^1 + \Delta^2 y_1 C_{k-1}^2 + \ldots + \Delta^p y_1 C_{k-1}^p + \ldots + \Delta^{k-1} y_1 C_{k-1}^{k-1} = S_{k-1}^1 \qquad *(2.20)$$

Следствие 2.5.1.

$$\Delta^p y_k = \Delta^p y_1 + S_{k-1}^{p+1} \qquad (2.23)$$

Теорема 2.6. Если дана конечноранговая система (2.3) и $k \geq r+1$, то:

$$S_k = y_1 C_k^1 + \Delta\ y_1 C_k^2 + \Delta^2 y_1 C_k^3 + \ldots + \Delta^p y_1 C_k^{p+1} + \ldots + \Delta^{r-1} y_1 C_k^r + dC_k^{r+1} \qquad (2.24)$$

Доказательство. Если ранговая система 2.3 конечна, то при $p = r-1$ член ,

$$\Delta^p y_1 C_k^{p+1} = \Delta^{r-1} y_1 C_k^{r-1+1} = \Delta^{r-1} y_1 C_k^r$$

а при $p = r$

$$\Delta^p y_1 C_k^{p+1} = \Delta^p y_1 C_k^{r+1} = dC_k^{r+1}$$

отсюда (2.20) принимает вид (2.24).*

Следствие 2.6.1.

$$S_k^p = \Delta^p y_1 C_k^1 + \Delta^{p+1} y_1 C_k^2 + \Delta^{p+2} y_1 C_k^3 + \ldots + \Delta^{p+t} y_1 C_k^{t+1} + \ldots + \Delta^{r-1} y_1 C_k^{r-p} + dC_k^{r-p+1} \qquad (2.25)$$

Следствие 2.6.2. Сумма членов натурального ряда равна:

$$S_{k.1} = C_k^1 + C_k^2 \qquad (2.26)$$

Следствие 2.6.3. Сумма членов арифметической прогрессии равна:

$$S_{k.1} = y_1 C_k^1 + dC_k^2 \qquad (2.27)$$

Следствие 2.6.4.

$$S_{k.2} = y_1 C_k^1 + \Delta y_1 C_k^2 + dC_k^3 \qquad (2.28)$$

Следствие 2.6.5.

$$S_{k.3} = y_1 C_k^1 + \Delta y_1 C_k^2 + \Delta^2 y_1 C_k^3 + dC_k^4 \qquad (2.29)$$

При $k < r+1$ S_k можно определять и по формуле 2.20

Пусть дана последовательность

$$y_k = y_1; y_2; ...; y_k; y_{k+1}; ...; y_t; y_{t+1}; ...$$

в которой $t > k$, где t и k – номера членов последовательности. Выделим в $\{y_k\}$ отрезок $[k+1;t]$ порядковых номеров. Обозначим сумму членов последовательности на этом участке символом $S_{[k+1;t]}$, тогда

$$S_{[k+1;t]} = S_t - S_k = y_{k+1} + y_{k+2} + ... + y_t \tag{2.30}$$

В отношении этой суммы имеет силу следующая теорема.

Теорема 2.7. В бесконечноранговой последовательности

$$y_k = y_1; y_2; ...; y_k; y_{k+1}; ...; y_t; y_{t+1}; ...$$

сумма $S_{[k+1;t]}$ членов на отрезке $[k+1;t]$ порядковых номеров равна:

$$S_{[k+1;t]} = y_1(C_t^1 - C_k^1) + \Delta y_1(C_t^2 - C_k^2) + \Delta^2 y_1(C_t^3 - C_k^3) + ... + \Delta^p y_1(C_t^{p+1} - C_k^{p+1}) +$$
$$+ ... + \Delta^{k-1} y_1(C_t^k - C_k^k) + \Delta^k y_1 C_t^{k+1} + \Delta^{k+1} y_1 C_t^{k+2} + ... + \Delta^{k+m} y_1 C_t^{k+m+1} + ... + \Delta^{t-1} y_1 C_t^t \tag{2.31}$$

Доказательство.

$$S_{[k+1;t]} = S_t - S_k = y_1 C_t^1 + \Delta\ y_1 C_t^2 + \Delta^2 y_1 C_t^3 + ... + \Delta^p y_1 C_t^{p+1} + ... + \Delta^{k-1} y_1 C_t^k + \Delta^k y_1 C_t^{k+1} + \Delta^{k+1} y_1 C_t^{k+2} +$$
$$+ ... + \Delta^{k+m} y_1 C_t^{k+m+1} + ... + \Delta^{t-1} y_1 C_t^t - (y_1 C_k^1 + \Delta\ y_1 C_k^2 + \Delta^2 y_1 C_k^3 + ... + \Delta^p y_1 C_k^{p+1} + ... + \Delta^{k-1} y_1 C_k^k) =$$
$$= y_1(C_t^1 - C_k^1) + \Delta\ y_1(C_t^2 - C_k^2) + \Delta^2 y_1(C_t^3 - C_k^3) + ... + \Delta^p y_1(C_t^{p+1} - C_k^{p+1}) + ... + \Delta^{k-1} y_1(C_t^k - C_k^k) +$$
$$+ \Delta^k y_1 C_t^{k+1} + \Delta^{k+1} y_1 C_t^{k+2} + ... + \Delta^{k+m} y_1 C_t^{k+m+1} + ... + \Delta^{t-1} y_1 C_t^t \ *$$

Следствие 2.7.1.

$$S_{[k+1;t]}^p = \Delta^p y_1(C_t^1 - C_k^1) + \Delta^{p+1} y_1(C_t^2 - C_k^2) + \Delta^{p+2} y_1(C_t^3 - C_k^3) + ... + \Delta^{p+n} y_1(C_t^{n+1} - C_k^{n+1}) +$$
$$+ ... + \Delta^{p+k-1} y_1(C_t^k - C_k^k) + \Delta^{p+k} y_1 C_t^{k+1} + \Delta^{p+k+1} y_1 C_t^{k+2} + ... + \Delta^{p+k+m} y_1 C_t^{p+k+m+1} + ... + \Delta^{p+t-1} y_1 C_t^t \tag{2.32}$$

Теорема 2.8. Если дана конечноранговая система 2.3 и $k > r+1$, то:

$$S_{[k+1;t]} = y_1(C_t^1 - C_k^1) + \Delta\ y_1(C_t^2 - C_k^2) + \Delta^2 y_1(C_t^3 - C_k^3) + ... + \Delta^p y_1(C_t^{p+1} - C_k^{p+1}) + ... + \Delta^{r-1} y_1(C_t^r - C_k^r) +$$
$$+ d(C_t^{r+1} - C_k^{r+1}) \tag{2.33}$$

Доказательство.

$$S_{[k+1;t]} = S_t - S_k = y_1 C_t^1 + \Delta\ y_1 C_t^2 + \Delta^2 y_1 C_t^3 + ... + \Delta^p y_1 C_t^{p+1} + ... + \Delta^{r-1} y_1 C_t^r + d C_t^{r+1} -$$
$$-(y_1 C_k^1 + \Delta\ y_1 C_k^2 + \Delta^2 y_1 C_k^3 + ... + \Delta^p y_1 C_k^{p+1} + ... + \Delta^{r-1} y_1 C_k^r + d C_k^{r+1}) =$$
$$= y_1(C_t^1 - C_k^1) + \Delta\ y_1(C_t^2 - C_k^2) + \Delta^2 y_1(C_t^3 - C_k^3) + ... + \Delta^p y_1(C_t^{p+1} - C_k^{p+1}) + ... + \Delta^{r-1} y_1(C_t^r - C_k^r) + d(C_t^{r+1} - C_k^{r+1})$$

Следствие 2.8.1.

$$S_{[k+1;t]}^p = \Delta^p y_1(C_t^1 - C_k^1) + \Delta^{p+1} y_1(C_t^2 - C_k^2) + \Delta^{p+2} y_1(C_t^3 - C_k^3) + ... + \Delta^{p+n} y_1(C_t^{n+1} - C_k^{n+1}) +$$
$$+ ... + \Delta^{r-p-1} y_1(C_t^{r-p} - C_k^{r-p}) + d(C_t^{r-p+1} - C_k^{r-p+1}) \tag{2.34}$$

Следствие 2.8.2. Сумма членов отрезка $[k+1;t]$ натурального ряда равна:

$$S_{[k+1;t]} = C_t^1 - C_k^1 + C_t^2 - C_k^2 \tag{2.35}$$

Следствие 2.8.3. Сумма членов арифметической прогрессии на отрезке $[k+1;t]$ порядковых номеров её членов равна:

$$S_{[k+1;t]} = y_1(C_t^1 - C_k^1) + d(C_t^2 - C_k^2) \tag{2.36}$$

Следствие 2.8.4.

$$S_{[k+1;t]} = y_1(C_t^1 - C_k^1) + \Delta y_1(C_t^2 - C_k^2) + d(C_t^3 - C_k^3) \tag{2.37}$$

Следствие 2.8.5.

$$S_{[k+1;t]} = y_1(C_t^1 - C_k^1) + \Delta y_1(C_t^2 - C_k^2) + \Delta^2 y_1(C_t^3 - C_k^3) + d(C_t^4 - C_k^4) \tag{2.38}$$

Теорема 2.9. В ранговой системе 2.3:

$$y_t - y_k = S^1_{[k;t-1]} \tag{2.39}$$

Доказательство.

$$y_t - y_k = y_1 + S^1_{t-1} - (y_1 + S^1_{k-1}) = S^1_{[k;t-1]} \quad *$$

Следствие 2.9.

$$\Delta^p y_t - \Delta^p y_k = S^{p+1}_{[k;t-1]} \tag{2.40}$$

Определение 2.18. Многочлен 2.7:

$$y_k = y_1 + \Delta\ y_1 C^1_{k-1} + \Delta^2 y_1 C^2_{k-1} + ... + \Delta^p y_1 C^p_{k-1} + ... + \Delta^{k-1} y_1 C^{k-1}_{k-1}$$

называется биномиальным.

Бинаминальным он называется потому, что его все члены содержат биномиальные коэффициенты. Первый член $y_1 = y_1 C^0_{k-1}$ также содержит биномиальный коэффициент, как и последний $\Delta^{k-1} y_1 C^{k-1}_{k-1} = \Delta^{k-1} y_1$.

Теоремы 2.1 – 2.9 являются основой теории биномиального многочлена 2.7.

Возьмём функцию $y = f(x)$, выраженную определённой формулой. Давая различные значения аргументу x на отрезке $[x_1; x_t]$ области определения функции, получим таблицу числовых значений этой формулы. В ней каждому аргументу x будет соответсвовать одно и только одно значение функции $y = f(x)$.

Перепишем эту таблицу в форме числовой последовательности:

$$k = \ 1,\ 2, ...,\ k, ..., t$$

$$x_k = x_1; x_2; ...; x_k; ...; x_t$$

$$y_k = y_1; y_2; ...; y_k; ...; y_t \tag{2.41}$$

Построив ранговую систему, выпишем из неё биномиальный многочлен по формуле (2.7).

Формула (2.7) является функцией от аргумента k , - порядкового номера, но по отношению к аргументу x функции $f(x)$ она функцией не является. Она является как бы её тенью, заместителем.

Определение 2.19. Биномиальный многочлен $y_k = f(k)$ числовой последовательности функции $y = f(x)$ называется квази-функцией $f(x)$.

Условное обозначение $y_k = f^0(x)$. Читается: игрек ка есть квази-функция функции $f(x)$.

Функцию $y = f(x)$, какой бы она ни была: алгебраической, тригонометрической, потенциальной, гиперболической или их комбинацией, - всегда можно выразить при помощи квази-функции, т.е. при помощи биномиального многочлена. Поэтому квази-функцию можно применять при любых исследованиях, в которых имеется числовая последовательность, но нет формулы, её выражающую. Квази-функция и будет такой формулой, хотя и приближённой. Однако её точность можно довести до любой степени, ссузив отрезок или разделив длинный отрезок на ряд коротких.

Сила квази-функции состоит в том, что её аргумент - порядковый номер члена числовой последовательности, - всегда можно привязать к аргументу x функция $f(x)$ и выразить формулой.

Примеры использования квази-функции, т.е. практического применения биномиального многочлена, будут рассматриваться во второй части.

Часть 2.

Глава 3. Бесконечноранговые последовательности.

Формула 2.7 даёт математическую связь между членом данной последовательности и её предыдущими членами. Отсюда следует, что все числовые последовательности являются возвратными. Всегда можно выразить k – ный член данной последовательности через её предыдущие члены.

Формула 2.7 решает некоторые вопросы, считающиеся трудными для современной математики. Например, она даёт формулу простого числа, т. е. выражает зависимость простого числа от его порядкового номера в таблице простых чисел; даёт формулы, выражающие k – ные цифры в числах π, e и других иррациональных числах.

Составим ранговую систему первых простых чисел:

$$\begin{array}{rl}
k = & 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \\
p_k = & 2, \ 3, \ 5, \ 7, 11, \ 13, 17, ... \\
\Delta p_k = & 1, \ 2, \ 2, \ 4, \ 2, \ 4, ... \\
\Delta^2 p_k = & 1, \ 0, \ 2, -2, \ 2, ... \\
\Delta^3 p_k = & -1, \ 2, \ -4, \ 4, ... \\
\Delta^4 p_k = & 3, \ -6, \ +8, ... \\
\Delta^5 p_k = & -9, \ +14, ... \\
\Delta^6 p_k = & 23, ...
\end{array} \qquad (3.1)$$

Ранговая система 3.1 бесконечна по вертикали и горизонтали.

По формуле 2.7 получим математическую зависимость простого числа p_k от его порядкового номера k в таблице простых чисел:

$$\begin{aligned}
p_k = {} & 2 + C_{k-1}^1 + C_{k-1}^2 - C_{k-1}^3 + 3C_{k-1}^4 - 9C_{k-1}^5 + 23C_{k-1}^6 - 53C_{k-1}^7 + 115C_{k-1}^8 - \\
& -237C_{k-1}^9 + 457C_{k-1}^{10} - 801C_{k-1}^{11} + 1213C_{k-1}^{12} - 1389C_{k-1}^{13} + 445C_{k-1}^{14} + 3667C_{k-1}^{15} - \\
& -15081C_{k-1}^{16} + 41335C_{k-1}^{17} + ... + \Delta^{k-1} p_1 C_{k-1}^{k-1}
\end{aligned} \qquad (3.2)$$

Коэффициент $\Delta^{k-1} p_1$ можно определить не только по ранговой системе 3.1 (менее трудоёмкий способ), но и по формуле:

$$\Delta^{k-1} p_1 = p_k C_{k-1}^0 - p_{k-1} C_{k-1}^1 + ... + (-1)^t p_{k-t} C_{k-1}^t + ... + (-1)^{k-1} p_1 C_{k-1}^{k-1}, \qquad (3.3)$$

которая следует из формулы 2.16.

Формула 3.2 бесконечна. Именно она выражает простое число p_k в зависимости от его порядкового номера k в таблице простых чисел.

Формула 3.2 и 3.3 обладают существенным недостатком – по ним нельзя вычислить неизвестные простые числа. Можно лишь выразить зависимость известных простых чисел от их порядковых номеров. И всё же основной факт доказан: существует формула, дающая простое число взависимости от его порядкового номера в таблице простых чисел. Мало того, имеет силу следущая теорема.

Теорема 3.1. В каком бы порядке не была задана бесконечная последовательность простых чисел, всегда существует формула:

$$p_k = p_1 + \Delta p_1 C_{k-1}^1 + \Delta^2 p_1 C_{k-1}^2 + ... + \Delta^t p_1 C_{k-1}^t + ... + \Delta^{k-1} p_1 C_{k-1}^{k-1} \quad (3.4)$$

дающая простое число p_k в зависимости от его порядкового номера k в этой последовательности.

Доказательство. Составим ранговую систему 2.3 и подставим в формулу 2.7 первые члены подпоследовательностей $\Delta p_1, \Delta^2 p_1, ..., \Delta^{k-1} p_1$, получим искомую формулу. *

В формуле 3.4 $\Delta^{k-1} p_1$ $(k = 1,2,3,...)$ суть коэффициенты, а индекс k в p_k и C_{k-1}^t означает номер простого числа в данной последовательности.

Теорема 3.1 утверждает, что существует бесконечное множество формул, дающих все простые числа в зависимости от их порядковых номеров в данной последовательности, поскольку существует бесконечное множество расположение простых чисел в таблицы. Например, для последовательности простых чисел:

$$p_k = 7,19,13,101,47,...$$

по формулам 3.4 и 3.3 получим:

$$p_k = 7 + 12C_{k-1}^1 - 18C_{k-1}^2 + 112C_{k-1}^3 - 348C_{k-1}^4 + ... + \Delta^{k-1} p_1 C_{k-1}^{k-1}$$

Кроме формул, дающих при $k = 1,2,3,...,\infty$ все простые числа, существует бесконечное множество формул, дающих все простые числа близнецы, как пары, например:

$$p_k = 2 + C_{k-1}^1 + C_{k-1}^2 - C_{k-1}^3 + 3C_{k-1}^4 - 9C_{k-1}^5 + 23C_{k-1}^6 - 53C_{k-1}^7 + 121C_{k-1}^8 - 289C_{k-1}^9 +$$
$$+717C_{k-1}^{10} - 1785C_{k-1}^{11} + ... + \Delta^{k-1} p_1 C_{k-1}^{k-1}, \quad (3.5)$$

которая бесконечна, так и первые числа, например;

$$p_k = 2 + C_{k-1}^1 + C_{k-1}^2 + 3C_{k-1}^3 - 7C_{k-1}^4 + 17C_{k-1}^5 - 39C_{k-1}^6 + 85C_{k-1}^7 - 185C_{k-1}^8 + 423C_{k-1}^9 +$$
$$+ ... + \Delta^{k-1} p_1 C_{k-1}^{k-1} \quad (3.6)$$

или вторые числа в парах, как, например:

$$p_k = 3 + 2C_{k-1}^1 + 4C_{k-1}^3 - 8C_{k-1}^4 + 18C_{k-1}^5 - 40C_{k-1}^6 + 86C_{k-1}^7 - 186C_{k-1}^8 + 424C_{k-1}^9 +$$
$$+ ... + \Delta^{k-1} y_1 C_{k-1}^{k-1} \quad (3.7)$$

Во всех этих формулах коэффициент $\Delta^{k-1} p_1$ определяеться формулой 3.3.

Существуют формулы, дающие все цифры чисел π, e и других трансцедентных чисел, взависимости от их порядковых номеров в данном числе:

$$\pi_k = 3 - 2C_{k-1}^1 + 5C_{k-1}^2 - 11C_{k-1}^3 + 24C_{k-1}^4 - 44C_{k-1}^5 + 60C_{k-1}^6 - 39C_{k-1}^7 - 90C_{k-1}^8 + 456C_{k-1}^9 -$$
$$-1265C_{k-1}^{10} + 2810C_{k-1}^{11} - 5464C_{k-1}^{12} + 9650C_{k-1}^{13} - 15778C_{k-1}^{14} + 24102C_{k-1}^{15} + ... + \Delta^{k-1} y_1 C_{k-1}^{k-1} \quad (3.8)$$

$$e_k = 2 + 5C_{k-1}^1 - 11C_{k-1}^2 + 24C_{k-1}^3 - 50C_{k-1}^4 + 101C_{k-1}^5 - 202C_{k-1}^6 + 405C_{k-1}^7 - 816C_{k-1}^8 + 1647C_{k-1}^9 -$$
$$-3315C_{k-1}^{10} + 6625C_{k-1}^{11} - 13091C_{k-1}^{12} + 25452C_{k-1}^{13} - 48387C_{k-1}^{14} + 85240C_{k-1}^{15} + ... + \Delta^{k-1} y_1 C_{k-1}^{k-1} \quad (3.9)$$

Существует формула для каждого иррационального числа, дающая все его цифры в зависимости от порядковых номеров последних. Например, все цифры иррационального числа $\sqrt{2}$ определяется формулой:

$$\sqrt{2_k} = 1 + 3C_{k-1}^1 - 6C_{k-1}^2 + 12C_{k-1}^3 - 23C_{k-1}^4 + 40C_{k-1}^5 - 61C_{k-1}^6 + 82C_{k-1}^7 + ... + \Delta^{k-1} y_1 C_{k-1}^{k-1} \quad (3.10)$$

Все эти формулы полезны для теории и бесполезны для практики.

Пусть дана геометрическая прогрессия: $\left\{aq^{k-1}\right\} = a, aq, aq^2, ..., aq^{k-1}$

Разделим $\left\{aq^{k-1}\right\}$ на a, получим: $\left\{q^{k-1}\right\} = 1, q, q^2, ..., q^{k-1}$

Определение 3.1. Геометрическая прогрессия $\left\{aq^{k-1}\right\}$ при $a = 1$:

$$\left\{q^{k-1}\right\} = 1, q, q^2, ..., q^{k-1} \tag{3.11}$$

называеться простой.

Определение 3.2. Геометрическая прогрессия $\left\{aq^{k-1}\right\}$ при $a > 1$:

$$\left\{aq^{k-1}\right\} = a, aq, aq^2, ..., aq^{k-1} \tag{3.12}$$

называеться составной.

Рассмотрим свойства простой геометрической прогрессии.

Составим её ранговую систему 2.3 по формуле 2.4:

$$\begin{array}{llll}
\left\{q^{k-1}\right\} = & 1, & q, & q^2, ..., q^{k-1} \\
 & q-1, & q(q-1), & q^2(q-1), ..., q^{k-1}(q-1) \\
 & (q-1)^2, & q(q-1)^2, & q^2(q-1)^2, ..., q^{k-1}(q-1)^2 \\
 & (q-1)^3, & q(q-1)^3, & q^2(q-1)^3, ..., q^{k-1}(q-1)^3 \\
 & \multicolumn{3}{l}{...} \\
 & (q-1)^p, & q(q-1)^p, & q^2(q-1)^p, ..., q^{k-1}(q-1)^p
\end{array} \tag{3.13}$$

Из бесконечной ранговой системы 3.13 следует:

$$y_1 = 1 \tag{3.14}$$

$$y_k = q^{k-1} \tag{3.15}$$

$$\Delta^p y_1 = (q-1)^p \tag{3.16}$$

$$\Delta^p y_k = q^{k-1}(q-1)^p \tag{3.17}$$

Теорема 3.2. Для $\left\{q^{k-1}\right\}$:

$$q^{k-1} = 1 + C_{k-1}^1(q-1) + C_{k-1}^2(q-1)^2 + ... + C_{k-1}^p(q-1)^p + ... + C_{k-1}^{k-1}(q-1)^{k-1} \tag{3.18}$$

Доказательство. Из 2.7:

$y_k = y_1 + \Delta\ y_1 C_{k-1}^1 + \Delta^2 y_1 C_{k-1}^2 + ... + \Delta^p y_1 C_{k-1}^p + ... + \Delta^{k-1} y_1 C_{k-1}^{k-1}$ из 3.14 – 3.17 следует

$q^{k-1} = 1 + C_{k-1}^1(q-1) + C_{k-1}^2(q-1)^2 + ... + C_{k-1}^p(q-1)^p + ... + C_{k-1}^{k-1}(q-1)^{k-1}$ *

Следствие 3.2.1.

$$q^2 = 1 + C_2^1(q-1) + C_2^2(q-1)^2 = 1 + 2(q-1) + (q-1)^2 \tag{3.19}$$

Следствие 3.2.2.

$$q^3 = 1 + 3(q-1) + 3(q-1)^2 + (q-1)^3 \tag{3.20}$$

Теорема 3.3. Для $\left\{q^{k-1}\right\}$

$$S_k = C_k^1 + C_k^2(q-1) + C_k^3(q-1)^2 + ... + C_k^{p+1}(q-1)^p + ... + C_k^k(q-1)^{k-1} \tag{3.21}$$

Доказательство. Из 2.20:

$S_k = y_1C_k^1 + \Delta\ y_1C_k^2 + \Delta^2 y_1C_k^3 + ... + \Delta^p y_1C_k^{p+1} + ... + \Delta^{k-1} y_1C_k^k$ и из 3.14 – 3.17 следует 3.21.*

Теорема 3.4. Для $\left\{q^{k-1}\right\}$

$$S_{[k+1;t]} = C_t^1 - C_k^1 + (q-1)(C_t^2 - C_k^2) + (q-1)^2(C_t^3 - C_k^3) + ... + (q-1)^p(C_t^{p+1} - C_k^{p+1}) + \\ + ... + (q-1)^{k-1} \qquad (3.22)$$

Доказательство. Подставим в формулу 2.31 формулы 3.14 – 3.17, получим 3.22.*

Теорема 3.5. Для $\left\{q^{k-1}\right\}$ при $t > k$

$$q^{t-1} - q^{k-1} = S_{[k-1;t-2]} \qquad (3.23)$$

Доказательство. Подставим в 2.39 $y_k = q^{k-1}$, $y_t = q^{t-1}$, получим 3.23.*

Умножив правые и левые части формул 3.15 – 3.23 на a , получим теоремы и формулы для составных геометрических прогрессий.

Глава 4. Конечноранговые последовательности.

Определение 4.1. Конечноранговая последовательность $\{y_{k.r}\}$, общий член y_k которой равен:

$$y_k = C_{k-1}^0 + C_{k-1}^1 + C_{k-1}^2 + ... + C_{k-1}^r \tag{4.1}$$

называеться элементарной.

Из сравнения формул 2.10 и 4.1 следует, что у элементарной последовательности $y_1 = 1; \Delta y_1 = 1; \Delta^2 y_1 = 1; ...; \Delta^p y_1 = 1; ...; \Delta^{r-1} y_1 = 1; d = 1$

Поэтому из всех последовательностей одинакого ранга, члены которых представлены натуральными числами, элементарная последовательность имеет наименьшие члены под равными номерами.

Элементарные последовательности могут быть любого ранга.

Натуральный ряд представляет собою элементарную последовательность первого ранга:

$$y_{k.1} = 1,\ 2,3,4,5,...$$

$$d = 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,...$$

Элементарная последовательность второго ранга:

$$y_{k.2} = 1,2,4,7,11,16,22,...$$

$$\Delta y_k = 1,\ 2,3,4,\ 5,\ \ 6,\ \ 7,...$$

$$d = 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ \ 1,...$$

Элементарная последовательность третьего ранга:

$$y_{k.3} = 1,2,4,8,15,26,42,64,...$$

$$\Delta y_k = 1,2,4,7,11,16,22,29,...$$

$$\Delta^2 y_k = 1,2,3,\ 4,\ 5,\ \ \ 6,\ \ 7,\ \ 8,...$$

$$d = 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ 1,\ \ \ \ 1,\ \ \ 1,\ \ 1,...$$

и т. д.

Теорема 4.1. Для элементарной последовательности:

$$S_{k.r} = C_k^1 + C_k^2 + C_k^3 + ... + C_k^{r-1} \tag{4.2}$$ *

Доказательство. Из 2.24 при $y_1 = \Delta y_1 = \Delta^2 y_1 = ... = \Delta^p y_1 = ... = d = 1$ следует 4.2.

Теорема 4.2. Для элементарной последовательности $\{y_k\}$

$$y_{k+1} = S_k + 1 \tag{4.3}$$

Доказательство. Из 4.1 $y_{k+1} = C_k^0 + C_k^1 + C_k^2 + ... + C_k^r$ и 4.2 $S_{k.(r-1)}^1 = C_k^1 + C_k^2 + C_k^3 + ... + C_k^r$ при $y_1 = C_k^0 = 1$ следует 4.3.*

Определение 4.2. Конечноранговая последовательность, не являющаяся элементарной, называется составной.

Рассмотрим последовательности, составленные из биномиальных коэффициентов.

Определение 4.3. Последовательность, составленная из биномиальных коэффициентов C_{n+m}^n при $n = const$ и $m = 0,1,2,3,...$, называеться биномиальной.

Рассмотрим первые биномиальные последовательности. Последовательность при $n = 0$ называеться нулевой, при $n = 1$ – первой, при $n = 2$ – второй и т.д.

Нулевая биномиальная последовательность $\left\{C_{0+m}^{0}\right\}$ получается при $m=0,1,2,3,...$

$C_{0+0}^{0}=1; C_{0+1}^{0}=1; C_{0+2}^{0}=1; C_{0+m}^{0}=1;$.

Такая последовательность: $\left\{C_{0+m}^{0}\right\}=1,1,1,...$ имеет нулевой ранг.

При $n=1$ и $m=0,1,2,3,...$ получим первую биномиальную последовательность:

$$\left\{C_{1+m}^{1}\right\}=C_{1}^{1}, C_{2}^{1}, C_{3}^{1}, ..., C_{1+m}^{1}$$

или

$$\left\{C_{1+m}^{1}\right\}=1,2,3,4,5,...$$

$$1,\ 1,\ 1,1,\ 1,...$$

Она имеет один ранг - $r=1$ и представляет собою натуральный ряд чисел.

При $n=2$ и $m=0,1,2,3,...$ получим вторую биномиальную последовательность:

$$\left\{C_{2+m}^{2}\right\}=C_{2}^{2}, C_{3}^{2}, C_{4}^{2}, ..., C_{2+m}^{2}$$

или

$$\left\{C_{2+m}^{2}\right\}=1,3,6,10,15,21,...$$

$$2,3,4,\ 5,\ 6,\ 7,...$$

$$1,\ 1,\ 1,\ \ 1,\ 1,\ 1,...$$

она имеет второй ранг – $r=2$.

Рассматривая биномиальные последовательности при $n=3,4,5,...$, видим, что у каждой из них ранг $r=n$.

Множество всех биномиальных последовательностей сводятся в таблицу 1.1 или 1.2. В такой таблице каждая биномиальная последовательность занимает один столбец под номером $r=n$ или строку номером $m=n$. Для определённости будем считать, что последовательности расположены в столбцы. Тогда первый столбец $n=r=o$ будет биномиальной последовательностью $\left\{C_{0+m}^{0}\right\}$, второй столбец с $n=r=2$ - последовательностью $\left\{C_{1+m}^{1}\right\}$, третий столбец с $n=r=2$ – последовательностью $\left\{C_{2+m}^{2}\right\}$ и т.д.

Для биномиальных последовательностей имеет силу следущая теорема.

Теорема 4.3. k – ный член биномиальной последовательности $\left\{C_{r+m}^{r}\right\}$ равен:

$$y_k=C_{k+r-1}^{r} \tag{4.4}$$

Доказательство. Рассмотрим таблицы 1.1 и 1.2. В них $n=r, k=m+1$ и тогда $y_k=C_{n+m}^{n}=C_{k+r-1}^{r}$.*

Теорема 4.4. В биномиальной последовательности $\left\{C_{k+r-1}^{r}\right\}$

$$y_1=C_r^r; \Delta y_1=C_r^{r-1}; \Delta^2 y_1=C_r^{r-2}, ..., \Delta^p y_1=C_r^{r-p}, ..., \Delta^{r-1} y_1=C_r^1; \Delta^r y_1=d=C_r^0 \tag{4.5}$$

Доказательство. Из таблицы 1.2 следует, что $\left\{C_{k+r-1}^{r}\right\}=C_r^r; C_{r+1}^r, C_{r+2}^r, .., C_{r+t}^r, (t=0,1,2,3,...)$

т.е. $y_1=C_r^r; y_2=C_{r+1}^r; y_3=C_{r+2}^r; ...; y_k=C_{r+k-1}^r$

Из формулы 1.4 следует:

$$\Delta y_1=C_{r+1}^r-C_r^r=C_r^{r-1}.$$

Член C_r^{r-1} даёт начало подпоследовательности $\left\{C_{r+k-1}^{r-1}\right\}$, следовательно, её вторым членом будет число C_{r+1}^{r-1}. Тогда из 1.4 следует:

$$\Delta^2 y_1 = C_{r+1}^{r-1} - C_r^{r-1} = C_r^{r-2}$$

Теорема верна для $p = 1,2$. Допустим, что она верна и при $p = 3,4,...,p-1$. Это означает, что $\Delta^{p-1} y_1 = C_r^{r-p+1}$. Вторым членом последовательности $\left\{C_{r+k-1}^{r-p+1}\right\}$ будет член C_{r+1}^{r-p+1}. Докажем, что теорема будет верна и для p.

Из 1.4 следует $\Delta^p y_1 = C_{r+1}^{r-p+1} - C_r^{r-p+1} = C_r^{r-p}$, откуда при $p = 1,2,3,...,r-1$, получим $C_r^{r-1}, C_r^{r-2}, C_r^{r-3}, ..., C_r^{r-p}, ..., C_r^1, C_r^0 = d$.*

Первые члены 4.5 биномиальных подпоследовательностей расположены в таблицах 1.1 и 1.2 на диагонали $(n+m) \div (m+1)$ при $n = m = r$.

Они же представляют собою основание треугольника Паскаля.

Теорема 4.5.

$$C_{k+r-1}^r = C_r^r C_{k-1}^o + C_r^{r-1} C_{k-1}^1 + C_r^{r-2} C_{k-1}^2 + ... + C_r^{r-p} C_{k-1}^p + ... + C_r^0 C_{k-1}^r \tag{4.6}$$

Доказательство. Подставляя в 2.10 $y_1 = C_r^r; \Delta y_1 = C_r^{r-1}; \Delta^2 y_1 = C_r^{r-2}, ..., \Delta^p y_1 = C_r^{r-p}$ получим 4.6.*

Формула 4.6 известна и доказана в комбинаторике.

Теорема 4.6. Для $\left\{C_{k+r-1}^r\right\}$

$$S_{k.r} = C_r^r C_k^1 + C_r^{r-1} C_k^2 + C_r^{r-2} C_k^3 + ... + C_r^{r-p} C_k^{p+1} + ... + C_r^0 C_k^{r+1} \tag{4.7}$$

Доказательство. Из 2.24 и 4.5 следует:

$$S_{k.r} = y_1 C_k^1 + \Delta y_1 C_k^2 + \Delta^2 y_1 C_k^3 + ... + \Delta^p y_1 C_k^{p+1} + ... + \Delta^{r-1} y_1 C_k^r + d C_k^{r+1} =$$

$$= C_r^r C_k^1 + C_r^{r-1} C_k^2 + C_r^{r-2} C_k^3 + ... + C_r^{r-p} C_k^{p+1} + ... + C_r^0 C_k^{r+1} .*$$

Следствие 4.6.1. $S_{k.2} = C_k^1 + 2C_k^2 + C_k^3$ (4.8)

Следствие 4.6.2. $S_{k.3} = C_k^1 + 3C_k^2 + 3C_k^3 + C_k^4$ (4.9)

Теорема 4.7. Для $\left\{C_{k+r-1}^r\right\}$ при $t > k$

$$S_{[k+1;t].r} = C_r^r (C_t^1 - C_k^1) + C_r^{r-1} (C_t^2 - C_k^2) + ... + C_r^{r-p} (C_t^{p+1} - C_k^{p+1}) + ... +$$

$$+ C_r^1 (C_t^r - C_k^r) + C_r^0 (C_t^{r+1} - C_k^{r+1}) \tag{4.10}$$

Доказательство. Из 2.33 и 4.5 следует 4.10.*

Следствие 4.7.1. $S_{[k+1;t].2} = C_t^1 - C_k^1 + 2(C_t^2 - C_k^2) + C_t^3 - C_k^3$ (4.11)

Следствие 4.7.2. $S_{[k+1;t].3} = C_t^1 - C_k^1 + 3(C_t^2 - C_k^2) + 3(C_t^3 - C_k^3) + C_t^4 - C_k^4$ (4.12)

Теорема 4.8. Для $\left\{C_{k+r-1}^r\right\}$ при $t > k$

$$C_{t+r-1}^r - C_{k+r-1}^r = S_{[k+1;t].(r-1)} \tag{4.13}$$

Доказательство. Поскольку $C_{t+r-1}^r = y_t$, а $C_{k+r-1}^r = y_k$, то из 2.39 следует $C_{t+r-1}^r - C_{k+r-1}^r = S_{[k;t-1].(r-1)}$. Поскольку порядковый номер C_{k+r-1}^r меньше m на единицу, то $S_{[k;t-1].(r-1)}$ преобразуется в $S_{[k+1;t].(r-1)}$.*

Следствие 4.8.1. $C_{t+1}^2 - C_{k+1}^2 = C_t^1 - C_k^1 + C_t^2 - C_k^2$ (4.14)

Следствие 4.8.2. $C_{t+2}^3 - C_{k+2}^3 = C_t^1 - C_k^1 + 2(C_t^2 - C_k^2) + C_t^3 - C_k^3$ (4.15)

Теорема 4.9. $C_k^2 + C_{k+1}^2 = k^2$ (4.16)

Доказательство.

$$C_k^2 + C_{k+1}^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3...(k-2)(k-1)\cdot k}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3...(k-2)} + \frac{1\cdot 2\cdot 3...(k-1)\cdot k\cdot (k+1)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3...(k-1)} = k^2\ .^*$$

По формуле 2.7 можно решать бесконечное множество задач такого типа: дана конечная последовательность действительных чисел:

$$1,2,3,...,k$$

$$a,b,c,...,x$$

Составить многочлен, который при подстановке в него порядковых номеров $1,2,3,...,k$ давал бы все члены данной последовательности $a,b,c,...,x$.

Задачи такого типа решаются по следующему алгоритму:

1). по формуле 3.3 или 2.17 определяют коэффициенты $n_2, n_3, ..., n_k$

$(n_1 = a; n_2 = \Delta y_1; n_3 = \Delta^2 y_1; ...; n_t = \Delta^{t-1} y_1, ..., n_k = d)$

Эти коэффициенты проще определить путём построения ранговой системы.

2). В формулу 2.7 или 3.4 подставляют полученные коэффициенты, после чего её приводят к алгебраической форме.

Пример 4.1. Составить многочлен, который при подстановке в него порядковых номеров $1,2,3,4,5$ давал бы простые числа $101,103,107,109,113$.

Решение. 1. Определяем коэффициенты путём построения ранговой системы:

1, 2, 3, 4, 5

101,103,107,109,113

2, 4, 2, 4

2, –2, 2

–4, 4

8

Получили коэффициенты: $n_1 = p_1 = 101, n_2 = p_2 = 2, n_3 = p_3 = 2, n_4 = p_4 = -4, n_5 = p_5 = 8$

2.По формуле 3.4 или 2.7 составляем многочлен:

$$p_k = p_1 + p_2 C_{k-1}^1 + p_3 C_{k-1}^2 + p_4 C_{k-1}^3 + p_5 C_{k-1}^4 = 101 + 2C_{k-1}^1 + 2C_{k-1}^2 - 4C_{k-1}^3 + 8C_{k-1}^4 =$$

$$= 101 - 2(k-1) + 2\frac{k^2 - k + 2}{2} - 4\frac{(k-3)(k-2)(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3} + 8\frac{(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} =$$

$$= \frac{k^4}{3} - 4k^3 + \frac{50}{3}k^2 - 25k + 113$$

Пример 4.2. Составить формулу, выражающую среднее расстояние планет Солнечной системы в зависимости от их порядковых номеров, считая от Солнца.

Решение. 1. Составляем последовательность:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,387	0,723	1,000	1,524	5,203	9,539	19,181	30,071	39,518

в которой первая строчка означает порядковые номера планет:
1 – Меркурий, 2 – Венера, 3 – Земля, 4 – Марс, 5 – Юпитер, 6 – Сатурн, 7 – Уран, 8 – Нептун, 9 – Плутон, а вторая – среднее расстояние от Солнца в астрономических единицах.

2. Путём построения ранговой системы или по формуле 3.3 или 2.20 определяем коэффициенты $y_1 = 0,387; \Delta y_1 = 0,336; \Delta^2 y_1 = -0,059; \Delta^3 y_1 = 0,306; \Delta^4 y_1 = 2,602; \Delta^5 y_1 = -8,008;$ $\Delta^6 y_1 = 20,561; \Delta^7 y_1 = -48,968; \Delta^8 y_1 = 103,303$.

3. Подставляем из в формулу 2.7 или 3.4, получаем формулу зависимости расстояния R_k от порядкового номера k планеты:

$$R_k = 0,387 + 0,336C_{k-1}^1 - 0,059C_{k-1}^2 + 0,306C_{k-1}^3 + 2,602C_{k-1}^4 - .$$

$$-8,008C_{k-1}^5 + 20,561C_{k-1}^6 - 48,968C_{k-1}^7 + 103,303C_{k-1}^8 .$$

Глава 5. Ранговая форма степени.

Определение 5.1. Последовательность, состоящая из степеней, называется степенной.

Рассмотрим степенную последовательность:

$$\left\{k^r\right\} = 1^r, 2^r, 3^r, ..., k^r \tag{5.1}$$

Определение 5.2. Степень k^r , разложенная по определённой формуле, назывется формой степени.

Определение 5.3. Степень, выраженная формулой k^r , называется алгебраической формой степени.

Например, алгебраической формой степени будут выражения: a^5, n^8, k^3, b^2 и т.п.

Определение 5.4. Степень, выраженная формулой 3.18:

$$q^{k-1} = 1 + C_{k-1}^1(q-1) + C_{k-1}^2(q-1)^2 + ... + C_{k-1}^p(q-1)^p + ... + C_{k-1}^{k-1}(q-1)^{k-1}$$

называется геометрической формой степени или q – формой.

Например, выраженния

$q^3 = 1 + 3(q-1) + 3(q-1)^2 + (q-1)^3$ и $17^3 = 1 + 3(17-1) + 3(17-1)^2 + (17-1)^3$ будут q – формой степени.

Рассмотрим последовательность квадратов и её ранговую систему:

$$\begin{array}{l} k = 1\ \ 2\ \ 3\ \ \ 4\ \ \ 5 \\ \left\{k^2\right\} = 1, 4, 9, 16, 25, ... \\ \qquad 3, 5, 7, \ 9, \ 11, ... \\ \qquad 2, 2, 2, \ 2, \ \ 2, ... \end{array}$$

В силу формулы 2.10 общий член этой последовательности будет равен:

$$k^2 = 1 + 3C_{k-1}^1 + 2C_{k-1}^2 \tag{5.2}$$

Построив ранговую систему для кубов:

$$\begin{array}{l} k = 1\ \ \ 2\ \ \ 3\ \ \ 4\ \ \ 5 \\ \left\{k^3\right\} = 1, \ \ 8, 27, 64, 125, ... \\ \qquad 7, 19, 37, \ 61, \ 91, ... \\ \quad 12, 18, 24, \ 30, \ 36, ... \\ \qquad 6, \ 6, \ \ 6, \ \ 6, \ \ 6, ..., \end{array}$$

по формуле 2.10 определяем общий член последовательности кубов:

$$k^3 = 1 + 7C_{k-1}^1 + 12C_{k-1}^2 + 6C_{k-1}^3 \tag{5.3}$$

По формулам 2.10 и 2.11 или ранговой системе 2.3 можно составить формулу общего члена k^r для любого показателя степени, например:

$$k^4 = 1 + 15C_{k-1}^1 + 50C_{k-1}^2 + 60C_{k-1}^3 + 24C_{k-1}^4 \tag{5.4}$$

$$k^5 = 1 + 31C_{k-1}^1 + 180C_{k-1}^2 + 390C_{k-1}^3 + 3600C_{k-1}^4 + 120C_{k-1}^5 \tag{5.5}$$

и т. д.

Определение 5.5. Степень, представленная формулой 2.10, называется ранговой формой степени или r – формой.

Формулы 5.2 – 5.5 являются ранговыми формами степени.

Ранговая форма степни есть разложение степени по формуле 2.12.

Теперь стала ясна математическая сущность показателя степени – он означает ранг данной степенной последовательности.

Из формулы 2.24 определяется сумма первых k – ных членов степенной последовательности 5.1:

$$S_{k.2} = C_k^1 + 3C_k^2 + 2C_k^3 \tag{5.6}$$

$$S_{k.3} = C_k^1 + 7C_k^2 + 12C_k^3 + 6C_k^4 \tag{5.7}$$

$$S_{k.4} = C_k^1 + 15C_k^2 + 50C_k^3 + 60C_k^4 + 24C_k^5 \tag{5.8}$$

$$S_{k.5} = C_k^1 + 31C_k^2 + 180C_k^3 + 390C_k^4 + 360C_k^5 + 120C_k^6 \tag{5.9}$$

Обозначив через

$$S_{[k+1;t].r} = (k+1)^r + (k+2)^r + ... + t^r , \tag{5.10}$$

тогда, учитывая 2.30:

$$S_{[k+1;t].r} = S_{t.r} - S_{k.r} ,$$

получим из 5.6 – 5.9:

$$S_{[k+1;t].2} = C_t^1 - C_k^1 + 3(C_t^2 - C_k^2) + 2(C_t^3 - C_k^3) \tag{5.11}$$

$$S_{[k+1;t].3} = C_t^1 - C_k^1 + 7(C_t^2 - C_k^2) + 12(C_t^3 - C_k^3) + 6(C_t^4 - C_k^4) \tag{5.12}$$

$$S_{[k+1;t].4} = C_t^1 - C_k^1 + 15(C_t^2 - C_k^2) + 50(C_t^3 - C_k^3) + 60(C_t^4 - C_k^4) + 24(C_t^5 - C_k^5) \tag{5.13}$$

$$S_{[k+1;t].5} = C_t^1 - C_k^1 + 31(C_t^2 - C_k^2) + 180(C_t^3 - C_k^3) + 390(C_t^4 - C_k^4) + 360(C_t^5 - C_k^5) + 120(C_t^6 - C_k^6) \tag{5.14}$$

Формулы 5.2 – 5.5 можно комбинировать между собой разными спосабами, например:

$$k^3 - k^2 = 4C_{k-1}^1 + 10C_{k-1}^2 + 6C_{k-1}^3 \tag{5.15}$$

$$k^4 - k^2 = 12C_{k-1}^1 + 48C_{k-1}^2 + 60C_{k-1}^3 + 24C_{k-1}^4 \tag{5.16}$$

$$k^5 - k^2 = 28C_{k-1}^1 + 178C_{k-1}^2 + 290C_{k-1}^3 + 360C_{k-1}^4 + 120C_{k-1}^5 \tag{5.17}$$

$$k^4 - k^3 = 8C_{k-1}^1 + 38C_{k-1}^2 + 54C_{k-1}^3 + 24C_{k-1}^4 \tag{5.18}$$

$$k^5 - k^3 = 24C_{k-1}^1 + 168C_{k-1}^2 + 384C_{k-1}^3 + 360C_{k-1}^4 + 120C_{k-1}^5 \tag{5.19}$$

и т.д.

Тоже самое можно сказать о формулах 5.6 – 5.9, 5.11 – 5.14:

$$S_{k.3} - S_{k.2} = 4C_k^2 + 100C_k^3 + 6C_k^4 \tag{5.20}$$

$$S_{k.4} - S_{k.2} = 12C_k^2 + 48C_k^3 + 60C_k^4 + 24C_k^5 \tag{5.21}$$

$$S_{k.5} - S_{k.2} = 28C_k^2 + 178C_k^3 + 390C_k^4 + 360C_k^5 + 120C_k^6 \tag{5.22}$$

$$S_{k.4} - S_{k.3} = 8C_k^2 + 38C_k^3 + 54C_k^4 + 24C_k^5 \tag{5.23}$$

$$S_{k.5} - S_{k.3} = 24C_k^2 + 168C_k^3 + 384C_k^4 + 360C_k^5 + 120C_k^6 \tag{5.24}$$

и т.д.

$$S_{[k+1;t].3} - S_{[k+1;t].2} = 4(C_t^2 - C_k^2) + 10(C_t^3 - C_k^3) + 6(C_t^4 - C_k^4) \tag{5.25}$$

$$S_{[k+1;t].4} - S_{[k+1;t].2} = 12(C_t^2 - C_k^2) + 48(C_t^3 - C_k^3) + 60(C_t^4 - C_k^4) + 24(C_t^5 - C_k^5) \tag{5.26}$$

$$S_{[k+1;t].5} - S_{[k+1;t].2} = 28(C_t^2 - C_k^2) + 178(C_t^3 - C_k^3) + 390(C_t^4 - C_k^4) + 360(C_t^5 - C_k^5) + 120(C_t^6 - C_k^6) \quad (5.27)$$

$$S_{[k+1;t].4} - S_{[k+1;t].3} = 8(C_t^2 - C_k^2) + 38(C_t^3 - C_k^3) + 54(C_t^4 - C_k^4) + 24(C_t^5 - C_k^5) \quad (5.28)$$

$$S_{[k+1;t].5} - S_{[k+1;t].3} = 24(C_t^2 - C_k^2) + 168(C_t^3 - C_k^3) + 384(C_t^4 - C_k^4) + 360(C_t^5 - C_k^5) + 120(C_t^6 - C_k^6) \quad (5.29)$$

Глава 6. Биномиальная форма степени.

Теорема 6.1. При $k=1,2,3,...$, $n=1,2,3,...$,

$$k^{2n}=k^n+2C_{k^n}^2 \tag{6.1}$$

Доказательство. $k^n+2C_{k^n}^2=k^n+2\frac{k^n(k^n-1)}{2}=k^{2n}$ *

Следствие 6.1.1

$$k^2=k\ \ +2C_k^2 \tag{6.2}$$

Следствие 6.1.2

$$k^4=k^2+2C_{k^2}^2 \tag{6.3}$$

Теорема 6.2 при $k=1,2,3,...$, $n=1,2,3,...$,

$$k^{3n}=k^n+6C_{k^n+1}^3 \tag{6.4}$$

Доказательство. $k^n+6C_{k^n+1}^2=k^n+6\frac{(k^n+1)k^n(k^n-1)}{6}=k^{3n}$ *

Следствие 6.2.1

$$k^3=k\ \ +6C_{k+1}^3 \tag{6.5}$$

Следствие 6.2.2

$$k^6=k^2+6C_{k^2+1}^3 \tag{6.6}$$

Теорема 6.3. При $k=1,2,3,...$, $n=1,2,3,...$,

$$k^{2n}=k^{2n-1}+2k^{2(n-1)}C_k^2 \tag{6.7}$$

Доказательство.

$k^{2n}=k^{2n-2+2}=k^{2(n-1)}k^2=k^{2(n-1)}(k+2C_k^2)=k^{2(n-1)+1}+2k^{2(n-1)}C_k^2=k^{2n-1}+2k^{2(n-1)}C_k^2$ *

Следствие 6.3.1

$$k^2-k=2C_k^2 \tag{6.8}$$

Следствие 6.3.2

$$k^4-k^3=2k^2C_k^2 \tag{6.9}$$

Теорема 6.4 При $k=1,2,3,...$, $n=1,2,3,...$,

$$k^{2n}=k^{2(n-1)}+6k^{2n-3}C_{k+1}^3 \tag{6.10}$$

Доказательство. $k^{2n}=k^{2n-3+3}=k^{2n-3}(k+6C_{k+1}^3)=k^{2(n-1)}+6k^{2n-3}C_{k+1}^3$ *

Следствие 6.4.1

$$k^2=1+6\frac{C_{k+1}^3}{k} \tag{6.11}$$

Следствие 6.4.2

$$k^4=k^2+6kC_{k+1}^3 \tag{6.12}$$

Теорема 6.5. При $k=1,2,3,...$, $n=1,2,3,...$,

$$k^{2n+1}=k^{2n}+2k^{2n-1}C_k^2 \tag{6.13}$$

Доказательство. $k^{2n+1}=k^{2n+1-2+2}=k^{2n-1}k^2=k^{2n-1}(k+2C_k^2)=k^{2n}+2k^{2n-1}C_k^2$ *

Следствие 5.1.

$$k^3=k^2+2kC_k^2 \tag{6.14}$$

Следствие 5.2.

$$k^5=k^4+2k^3C_k^2 \tag{6.15}$$

Теорема 6. При $k=1,2,3,...$, $n=1,2,3,...$,

$$k^{2n+1}=k^{2n-1}+6k^{2(n-1)}C_{k+1}^3 \tag{6.16}$$

Доказательство. $k^{2n+1}=k^{2n+1-3+3}=k^{2(n-1)}(k+6C_{k+1}^3)=k^{2n-1}+6k^{2(n-1)}C_{k+1}^3$ *

Следствие 6.1.

$$k^5=k^3+6k^2C_{k+1}^3 \tag{6.17}$$

Теорема 7. При $k=1,2,3,...$, $n=1,2,3,...$,

$$k^{2n-1}=k^{2(n-1)}+2k^{2n-3}C_k^2 \tag{6.18}$$

Доказательство. $k^{2n-1}=k^{2n-1-2+2}=\dfrac{k^{2n+1}}{k^2}=\dfrac{k^{2n}+2k^{2n-1}C_k^2}{k^2}=k^{2(n-1)}+2k^{2n-3}C_k^2$ *

Теорема 8. При $k=1,2,3,...$, $n=1,2,3,...$,

$$k^{2n-1}=k^{2n-3}+6k^{2(n-2)}C_{k+1}^3 \tag{6.19}$$

Доказательство. $k^{2n-1}=k^{2n-1-3+3}=k^{2(n-2)}(k+6C_{k+1}^3)=k^{2n-3}+6k^{2(n-2)}C_{k+1}^3$ *

Определение 6.1. Представление степени k^{2n} формулой 6.1 назвается квадратной формой или квадрат-формой степени.

Формулы 6.1 – 6.3 являются квадрат-формой степеней k^{2n},k^2,k^4.

Определение 6.2. Представление степени k^{3n} формулой 6.4 назвается кубической формой степени или куб-формой.

Формулы 6.4 – 6.6 являются куб-формой степеней k^{3n},k^3,k^6.

Определение 6.3. Степень k^n, представленная формулами 6.7 – 6.19 и им подобным, называеться квадратно-кубической или $k-$ формой.

Формулы 6.7 – 6.19 являются $k-$ формой степени.

Определение 6.4. Степень, выраженная при помощи биномиальных коэффициентов, называется биномиальной формой степени.

Биномиальная форма степени:

1. Геометрическая или $q-$ форма,
2. Ранговая или $r-$ форма степени,
3. Квадрат – форма.
4. Куб – форма,
5. $k-$ форма.

Пример 6.1. выразить число $R=161051$ во всех формах степени.

Решение.

1. $R=161051=11^5$ – алгебраическая форма
2. $11^5=11^{6-1}=1+(11-1)C_{6-1}^1+(11-1)^2C_{6-1}^2+(11-1)^3C_{6-1}^3(11-1)^4C_{6-1}^4+(11-1)^5C_{6-1}^1=$

$= 1 + 10C_5^1 + 10^2 C_5^2 + 10^3 C_5^3 + 10^4 C_5^4 + 10^5 C_5^5 \ -q -$ форма

3. $11^5 = 1 + 31C_{10}^1 + 180C_{10}^2 + 390C_{10}^3 + 360C_{10}^4 + 120C_{10}^5 \ -r -$ форма

4. $11^5 = 11^4 + 2 \cdot 11^3 C_{11}^2 \ -k -$ форма

5. $11^5 = 11^3 + 6 \cdot 11^2 C_{12}^3 \ -k -$ форма

Числовая последовательность 2.1 представляет собою множество, которое всегда можно подразделить на числовые подмножества по какому-либо признаку, например, по классам порядковых номеров членов этой последовательности.

Обозначим через m – модуль, r – остаток класса, тогда все порядковые номера k можно разбить на m классов чисел:

$$k = r + mt\ ,\ 0 \le r \le m\ .$$

Пусть, например, $m = 4$, тогда получим полную систему вычетов по модулю $m = 4$:

$$k_1 = 1 + 4t; k_2 = 2 + 4t; k_3 = 3 + 4t; k_4 = 4 + 4t; (t = 0,1,2,...)$$

Если, например, последовательность кубов:

$$y_k = 1,8,27,64,125,216,... \tag{6.20}$$

принять за множество, то оно разобьётся на $m = 4$ последовательности – подмножества:

$$y_{1.k} = 1,125,729,2197,4913,...$$

$$y_{2.k} = 8,216,1000,2744,5832,...$$

$$y_{3.k} = 27,343,1331,3375,6859,...$$

$$y_{4.k} = 64,512,1728,4096,8000,...$$

Обратим внимание на то, что один и тот же член имеет разные номера: в последовательности-множестве 6.20 номер $k = r + m(t-1)$, а в последовательности-подмножестве – номер

$$t = \frac{k-r}{m} + 1 \tag{6.21}$$

Определение 6.5. Конечноранговая числовая последовательность 2.1, не являющаяся подмножеством другой, называется полной.

Определение 6.6. Конечноранговая числовая последовательность 2.1, являющаяся подмножеством другой, называется сокращённой.

Понятия “полная” и “сокращённая” последовательности относительны и употребляются совместно: если даётся сокращённая последовательность, то должна указываться и полная.

Сокращённая последовательность даёт возможность определить любой член полной последовательности при малых C_k^n . Это свойство сокращённых последовательностей используется при вычислениях с большими k и ограниченном объёме таблицы биномиальных коэффициентов.

Покажем сокращение последовательности на примере кубов.

Пусть дана последовательность кубов 6.20. Формула 5.3 её k – ного члена имеет вид:

$$y_k = 1 + 7C_{k-1}^1 + 12C_{k-1}^2 + 6C_{k-1}^3$$

Пусть нужно определить член y_{68} при наличии таблицы биномиальных коэффициентов при $n = 0,1,2,3$ и $m = 0,1,2,...,20$. Тогда члены $C_{68-1}^1, C_{67}^2, C_{67}^3$ будут отсутствовать в этой таблице, поскольку в них$C_k^n = C_{n+m}^n = C_{1+66}^1, C_{2+65}^2, C_{3+64}^3, m > 20$.

Разобьём порядковые номера k последовательности кубов 6.20 на произвольное число m_1 классов, например, $m_1 = 4$. Тогда порядковый номер $k = 68$ будет принадлежать классу $0 + 4t = 4 + 4(t-1)$, потому что $\frac{68}{4}$ даёт остаток $r = 0$.

Класс $4 + 4(t-1) = 4 + 4t_1$ при $t = 0,1,2,3,...$ даёт сокращённую последовательность кубов $4^2, 8^2, 12^2, ..., (4+4t_1)^3$:

$k =$ 1 2 3 4 5

$y_k = 64,\ 512,\ 1728,\ 4096,\ 8000,...$

448, 1216, 2368, 3904,...

768, 1512, 1536,...

384, 384,... (6.22)

Общий член этой последовательности:

$$y_k = 64 + 448C_{k-1}^1 + 768C_{k-1}^2 + 384C_{k-1}^3$$

Член y_{68} последовательности кубов 6.20 будет иметь в последовательности 6.23 порядковый номер $t = \frac{k}{m} = \frac{68}{4} = 17$

Порядковый номер $t = 17 < 20$, поэтому данной таблицы хватает для вычисления члена y_{17} последовательности 6.23 по формуле:

$$y_{17} = 64 + 448C_{k-1}^1 + 768C_{k-1}^2 + 384C_{k-1}^3 = 64 + 448C_{16}^1 + 768C_{16}^2 + 384C_{16}^3 = 314432$$

Если бы таблица была бы ещё меньше, допустим, при $m \le 10$, то последовательность кубов 6.20 можно было бы разделить на число $m_1 > 4$, например, $m_1 = 10$. Тогда порядковый номер $k = 68$ имел бы класс $8 + 10t$, поскольку $\frac{68}{10}$ даёт остаток $r = 8$.

При $t = 0,1,2,...$, получили бы множество кубов $8^3, 18^3, 28^3, ..., (8+10t_1)^3$

$k =$ 1 2 3 4 5

$y_k =$ 512, 5832, 21952, 54872, 110592,...

5320, 16120, 32920, 55720,...

10800, 16800, 22800,...

6000, 6000,... (6.23)

у которого общий член имеет вид:

$$y_k = 512 + 5320C_{k-1}^1 + 10800C_{k-1}^2 + 6000C_{k-1}^3$$

В последовательности 6.23 член y_{68} последовательности 6.20 будет иметь номер $t = \frac{k-r}{m_1} + 1 = \frac{68-8}{10} + 1 = 7$, и тогда его значение можно будет вычислить по полученной формуле при помощи таблицы биномиальных коэффициентов при $m \le 10$:

$$y_7 = 512 + 5320C_6^1 + 10800C_6^2 + 6000C_6^3 = 314432$$

Таким образом, при сокращении полной числовой последовательности был определён член y_{68} при помощи C_6^1, C_6^2, C_6^3 вместо $C_{67}^1, C_{67}^2, C_{67}^3$.

Глава 7. Биномиальная форма многочлена.

Определение 7.1. Многочлен, степень которого выражена алгебраической формой, называется алгебраическим или алгебраической формой многочлена.

Например, многочлен

$$M = 1{,}7x^5 + 83{,}6x^4 - 12{,}7x^3 + 37{,}8x^2 - x + 12358$$

будет алгебраическим.

Пусть дан многочлен

$$M = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + d \qquad (7.1)$$

в котором $a, b, c, ..., d, x$ – действительные числа, n – натуральное.

Обозначим через $\left\{x^n\right\}$ биномиальную форму степени, тогда:

$$x^n = \left\{x^n\right\} \qquad (7.2)$$

Формула 7.2 приравнивает алгебраическую форму степени x^n к биномиальной $\left\{x^n\right\}$.

Из 7.1 – 7.2 следует:

$$M = a\left\{x^n\right\} + b\left\{x^{n-1}\right\} + c\left\{x^{n-2}\right\} + ... + d \qquad (7.3)$$

После раскрытия фигурных скобок получим биномиальную форму многочлена.

Определение 7.2. Многочлен, степень которого выражена биномиальной формой, называеться биномиальным или биномиальной формой многочлена.

При преобразовании алгебраической формы многочлена в биномиальную можно использовать все пять биномиальных форм степени. Здесь же, ради простоты, будет использованна только ранговая форма степени.

Поставим в 7.3 ранговую форму степени, получим ранговую форму многочлена с одним неизвестным, например, для квадратного:

$$M = ax^2 + bx + c = a(1 + 3C_{x-1}^1 + 2C_{x-1}^2) + b(x - 1 + 1) + c = a(1 + 3C_{x-1}^1 + 2C_{x-1}^2) + bC_{x-1}^1 + b + c =$$
$$2aC_{x-1}^2 + (3a + b)C_{x-1}^1 + a + b + c$$

или

$$M = ax^2 + bx + c = AC_{x-1}^2 + BC_{x-1}^1 + C \qquad (7.4)$$

в котором

$$A = 2a; B = 3a + b; C = a + b + c\ .$$

Совершая аналогичные действия, получим:

$$M = ax^3 + bx^2 + cx + d = AC_{x-1}^3 + BC_{x-1}^2 + CC_{x-1}^1 + D$$
$$A = 6a; B = 2(6a + b); C = 7a + 3b + c; D = a + b + c + d \qquad (7.5)$$

$$M = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = AC_{x-1}^4 + BC_{x-1}^3 + CC_{x-1}^2 + DC_{x-1}^1 + E$$
$$A = 24a; B = 6(10a + b); C = 50a + 12b + 2c; D = 15a + 7b + 3c + d; E = a + b + c + d \qquad (7.6)$$

$$M = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = AC_{x-1}^5 + BC_{x-1}^4 + CC_{x-1}^3 + DC_{x-1}^2 + EC_{x-1}^1 + F$$
$$A = 120a; B = 24(15a + b); C = 6(65a + 10b + c); D = 2(90a + 25b + 6c + d);$$
$$E = 31a + 15b + 7c + 3d + e; F = a + b + c + d + e + f \qquad (7.7)$$

и т.д.

Пример 7.1. Преобразовать алгебраический многочлен

$$M = 4,6x^3 - 32,7x^2 + 13,4x + 14$$

в биномиальную форму.

Решение.

$$M = ax^3 + bx^2 + cx + d = AC_{x-1}^3 + BC_{x-1}^2 + CC_{x-1}^1 + D\,,\ a = 4,6; b = -32,7; c = 13,4; d = 14$$

Используя 7.5, получаем:

$$A = 6a = 27,6; B = 2(6a - b) = -10,2; C = 7a + 3b + c = -52,5; D = a + b + c + d = -0,7$$

$$M = AC_{x-1}^3 + BC_{x-1}^2 + CC_{x-1}^1 + D = 27,6C_{x-1}^3 - 10,2C_{x-1}^2 - 52,5C_{x-1}^1 - 0,7$$

Первые разности $A, B, ...$ многочлена M можно определить и путём построения его ранговой системы при $x = 1,2,3,...,x+n$, например: $M = f(x) = 4,6x^3 - 32,7x^2 + 13,4x + 14$

$f(x) = f(1) = -0,7; f(x) = f(2) = -53,2; f(x) = f(3) = -115,9; f(x) = f(4) = -161,2; f(x) = f(5) = -161,5;$

$$\begin{array}{rlllll}
k = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\{y_k\} = & -0,7; & -53,2; & -115,9; & -161,2; & -161,5;... \\
\{\Delta y_k\} = & -52,5; & -62,7; & -45,3; & -0,3;... & \\
\{\Delta^2 y_k\} = & -10.2; & 17,4; & 45,0;... & & \\
\{\Delta^3 y_k\} = \{d\} = & 27,6; & 27,6 & & &
\end{array}$$

Для уверенности в истинности арифметических действий при построении ранговой системы многочлена берётся $x = n + 2$, а не $x = n + 1$ затем, что бы получить первые два члена однородной последовательности $\{d\}$, которые должны быть равны.

При вычислении биномиальных коэффициентов в действительных числах вместо формулы 1.1 лучше пользоваться формулой 1.22.

Используя формулы:

$$C_{x-1}^1 = x - 1$$

$$C_{x-1}^2 = \frac{x^2 - 3x + 2}{2}$$

$$C_{x-1}^3 = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{6}$$

$$C_{x-1}^4 = \frac{x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24}{24}$$

$$C_{x-1}^5 = \frac{x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120}{120}$$

$$C_{x-1}^6 = \frac{x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 + 1764x + 720}{720}$$

и т. п., которые получены из формуы 1.1, можно перобразовать биномиальную форму многочлена в алгебраическую по формулам:

$$M = AC_{x-1}^1 + B = Ax - A + B \tag{7.8}$$

$$M = AC_{x-1}^2 + BC_{x-1}^1 + C = \frac{1}{2}Ax^2 + (B - 1,5A)x + A - B + C \tag{7.9}$$

$$M = AC_{x-1}^3 + BC_{x-1}^2 + CC_{x-1}^1 + D = \frac{1}{6}[Ax^3 + 3(B-2A)x^2 + (11A-9B+6C)x] - A + B - C + D \tag{7.10}$$

$$M = AC_{x-1}^4 + BC_{x-1}^3 + CC_{x-1}^2 + DC_{x-1}^1 + E = \frac{1}{24}[Ax^4 + 2(2B-5A)x^3 + (35A-24B+12C)x^2 + $$
$$+2(22B-25A-18C+12D)x] + A - B + C - D + E \tag{7.11}$$

$$M = AC_{x-1}^5 + BC_{x-1}^4 + CC_{x-1}^3 + DC_{x-1}^2 + EC_{x-1}^1 + F = \frac{1}{120}[Ax^5 + 5(B-3A)x^4 + 5(17A-10B+4C)x^3 + $$
$$+5(35B-45A-24C+12D)x^2 + 2(137A-125B+110C-90D+60E)x] - A + B - C + D - E + F \tag{7.12}$$

$$M = AC_{x-1}^6 + BC_{x-1}^5 + CC_{x-1}^4 + DC_{x-1}^3 + EC_{x-1}^2 + FC_{x-1}^1 + J = \frac{1}{720}[Ax^6 + 3(2B-7A)x^5 + $$
$$+5(35A-18B+6C)x^4 + 5(102B-147A-60C+24D)x^3 + 2(812A-675B+525C-$$
$$-360D+180E)x^2 + 6(274B-294A-250C+220D-180E+120F)x] + A - B + C - D + E - F + J \tag{7.13}$$

и т.д.

Пример 7.2. Преобразовать биномиальный многочлен

$$M = 27{,}6C_{x-1}^3 - 10{,}2C_{x-1}^2 - 52{,}5C_{x-1}^1 - 0{,}7$$

в алгебраический.

Решение. Здесь $A = 27{,}6; B = -10{,}2; C = -52{,}5; D = -0{,}7$

Из 7.10 следует:

$$27{,}6C_{x-1}^3 - 10{,}2C_{x-1}^2 - 52{,}5C_{x-1}^1 - 0{,}7 = \frac{1}{6}[27{,}6x^3 + 3(-10{,}2 - 2\cdot 27{,}6)x^2 + (11\cdot 27{,}6 - 9(-10{,}2) + $$
$$+6(-52{,}2))x] - 27{,}6 - 10{,}2 + 52{,}5 - 0{,}7 = 4{,}6x^3 - 32{,}7x^2 + 13{,}4x + 14$$

Биномиальный многочлен в своём составе имеет члены с разными степенями, среди которых имеются одночлены с наименьшей и наибольшей степенями.

Определение 7.2. Наибольший верхний индекс n биномиального коэффициента многочлена:

$$M = AC_{k-1}^n + BC_{k-1}^{n-1} + ... + D$$

называется его степенью.

Глава 8. Биномиальные уравнения.

Поскольку имеется биномиальная форма многочлена, то существуют и биномиальные уравнения.

Определение 8.1. Уравнение, содержащее биномиальные коэффициенты, нижние индексы которых неизвестны, называется биномиальным.

К биномиальным уравнениям приводит практитка, экперимент.

Везде там, где иссследуется неизвестная функция от одного переменного, обработка экспериментальных данных и цели эксперимента могут привести к необходимости выявить функцию и те числовые значения аргумента, при которых неизвестная функция равна нулю.

Этот вопрос полностью решает биномиальное уравнение с одним неизвестным.

Пусть задан ряд дискретных значений неизвестной функции $f(x)$:

$$f(x_1)=y_1;f(x_2)=y_2;...;f(x_{x-1})=y_{k-1};f(x_k)=y_k,$$

причём некоторые из них с противоположными знаками.

Требуеться определить саму функцию и её корни.

Выписав заданную числовую последовательность и построив её ранговую систему:

$k=\quad 1,\quad 2,\ ...,\quad k-1,\quad k,...,t$

$x_k=\quad x_1,\quad x_2,\ ...,\quad x_{k-1},\quad x_k,...,x_t$

$y_k=\quad y_1,\quad y_2,\ ...,\quad \pm y_{k-1},\quad \pm y_k,...,y_t$

$y_k=\ \Delta y_1,\ \ \Delta y_2,\ ...,\ \pm\Delta y_{k-1},\ \ \pm\Delta y_k,...,\Delta y_t$

$y_k=\Delta^2 y_1,\ \Delta^2 y_2,\ ...,\pm\Delta^2 y_{k-1},\ \pm\Delta^2 y_k,...,\Delta^2 y_t$

....

по формуле 2.7 определяют неизвестную функцию и приравнивают её к нулю:

$$f(k)=y_k=y_1+\Delta y_1 C_{t-1}^1+\Delta^2 y_1 C_{t-1}^2+...+\Delta^{k-1}y_1 C_{t-1}^{k-1}+\Delta^k y_1 C_{t-1}^k+...+\Delta^{t-1}y_1 C_{t-1}^{t-1}=0$$

Получили биномиальное уравнение с одним неизвестным.

Пусть, например, в результате эксперимента получили ряд числовых значений функчии при заданных аргументах $x_1,x_2,...$:

$$f(0,3)=+1,42;f(0,6)=+2,14;f(1,47)=-0,93;f(2,61)=-1,37;f(4,17)=+3,39\,.$$

Если составить последовательность числовых значений функции, то получим:

$$y_k=+1,42;+2,14;-0,93;-1,37;+3,39$$

Рассматривая эту последовательность, видим, что функция меняет знак между вторым и третьим членами, четвёртым и пятым, т.е. между этими членами расположены нули неизвестной функции $f(x)$. Требуется определить аргументы (корни) неизвестной функции, при которых она равна нулю. При этом предполагается, что функция $f(x)$ непрерывна.

По данной числовой последовательности определяем первые разности:

$k=\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5$

$x=\ \ 0,3;\quad 0,6;\quad 1,47;\quad 2,61;\ 4,17$

$y_k=1,42;\quad 2,14;\ -0,93;\ -1,37;\ \ 3,39$

$0,72;\ -3,07;\ -0,44;\quad 4,76$

$-3,79;\quad 2,63;\ \ 5,20$

$6,42;\quad 2,57$

$-3,85$ (8.1)

По формуле 2.7 определяем неизвестную функцию:

$$f(k)=1,42+0,72C_{k-1}^{1}-3,79C_{k-1}^{2}+6,42C_{k-1}^{3}-3,85C_{k-1}^{4}$$

Приравняв её к нулю, получим биномиальное уравнение с одним неизвестным:

$$f(k)=1,42+0,72C_{k-1}^{1}-3,79C_{k-1}^{2}+6,42C_{k-1}^{3}-3,85C_{k-1}^{4}=0$$

Для решения биномиального уравнения с одним неизвестным не нужно каким-либо методами определять отрезки, на которых расположены корни этого уравнения. Такие отрезки уже даны в готовом виде в заданной числовой последовательности. Любые два соседних члена с противоположными знаками являются концами $y-$ отрезка, внутри которого расположен нуль функции. Отсюда отнюдь не следует, что если в числовой последовательности нет членов с противоположными знаками, то биномиальное уравнение корней не имеет. Оно их имеет, если при положительном y кривая уравнения спускается в низ, касается оси OX и снова устремляется вверх. Или при отрицательных y кривая поднимается вверх, касается оси OX и снова падает вниз. Эти корни биномиального уравнения можно вычислить методом высшей математики, преобразовав биномиальный в алгебраический.

В нашем уравнении с противоположными знаками будут следующие $x-$ отрезки:

$$[2,14;-0,93] \text{ и } [-1,37;+3,39]$$

Встаёт задача: зная $y-$ отрезок $[\pm y_{k-1};\mp y_k]$ с противоположными знаками, отделить на нём нуль функции $(y=0)$ и, исходя из этого, определить аргумент (корень) x, при котором $y=0$.

В математике существует множество способов отделения корня уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[x_{k-1};x_k]$: метод хорд, касательных, проб, итерации и т.п. Но все они страдают существенным недостатком – являются методами постепенного приближения к искомому корню, а потому – медленными и трудоёмкими.

Этого недостатка лишён метод квдратных уравнений – метод отделения корня с помощью формулы 2.7 общего члена числовой последовательности. Этот метод применим к алгебраическим уравнениям любой степени. Поэтому рассмотрим этот метод отдельно.

Глава 9. Отделение методом квадратных уравнений корня уравнения на заданном отрезке.

Пусть задано уравнение $f(x)=0$ и отрезок $[x_{k-1};x_k]$, на концах которого функция меняет знак $[\pm y_{k-1};\mp y_k]$ и внутри которого расположен один действительный корень. Требуется отделить корень x с заданной степенью точности на отрезке $[x_{k-1};x_k]$.

Необходимым и достаточным условием применения метода квадратных уравнений являются наличие противоположных знаков функции на концах этого отрезка:

$$f(x_{k-1})=\pm y_{k-1}; f(x_k)=\mp y_k \tag{9.1}$$

Из 9.1 вытекает взаимооднозначное соответствие между аргументом x и числовым значением y функции $f(x)$:

$$x_{k-1}\leftrightarrow \pm y_{k-1}; x_k \leftrightarrow \mp y_k \tag{9.2}$$

или в общем виде

$$x \leftrightarrow y \tag{9.3}$$

где символ $\leftrightarrow$ означает взаимо-однозначное соответсвие.

Из взаимо-однозначного соответсвия 9.2 аргумента и функции вытекает взаимо-однозначное соответсвие между отрезками:

$$[x_{k-1};x_k]\leftrightarrow[\pm y_{k-1};\mp y_k] \tag{9.4}$$

-- каждой точке $x-$ отрезка $[x_{k-1};x_k]$ соответсвует одна и только одна точка $y-$ отрезка $[\pm y_{k-1};\mp y_k]$. В частности, нулю функции $(y=0)$ соответсвует один и только один корень x (9.3).

Концы $y-$ отрезка $\pm y_{k-1}$ и $\mp y_k$ можно принять за два члена числовой последовательности:

$$y_k=\pm y_{k-1};\mp y_k .$$

Особенность этой двухчленной последовательности состоит в том, что её члены имеют противоположные знаки.

Возьмём на $x-$ отрезке $[x_{k-1};x_k]$ какую-либо внутреннюю точку x и определим $y=f(x)$. Поскольку $x_{k-1}<x<x_k$, то в силу взаимо-однозначного соответсвия 9.3, получим y такой, что $\pm y_{k-1}<y<\mp y_k$, причём y будет иметь знак + или – или будет равен нулю. Если $y=0$, то тем самым случайно определили точный корень x и все дальнейшие вычисления прекращаются.

В большинстве случаев получим $f(x)=+y$ или $f(x)=-y$. Допустим, получили $\mp y$, т.е. знак y совпадает со знаком $\mp y_k$. Это означает, что $y-$ отрезок можно сократить, т.е. приблизить правый конец к левому:

$[\pm y_{k-1};\mp y\ ]$, где $+y<y_{k-1}$ или $-y>-y_{k-1}$.

В силу взаимо-однозначного соответствия 9.4 сократится и $x-$ отрезок $[x_{k-1};x_k]$, в котором $x<x_k$.

Обозначив новые $x-$ и $y-$ отрезки прежними символами $[x_{k-1};x_k]$ и $[\pm y_{k-1};\mp y_k]$.

Опять возьмём какую-нибудь внутреннюю точку x и повторим операцию.

Рано или поздно, получим $\pm y$, знак которого совпадает со знаком $\pm y_{k-1}$, и противоположен знаку $\mp y_k$. Операция по отысканию внутренней точки x закончена.

Затем переходят к следующему шагу. Составляется числовая последовательность из трёх членов:

$$\pm y_{k-1};\pm y;\mp y_k$$

Ради упрощения заменим буквенные символы числами:

$$\pm y_{k-1} = y_1; y = y_2; y_k = y_3 ,$$

получим трёхчленную последовательность:

$$\pm y_1;\pm y_2;\mp y_3 . \qquad (9.5)$$

Второй и третий члены имеют разные знаки. Это означает, что между ними расположен нуль функции $(y=0)$.

Составим формулу общего члена для трёхчленной последовательности 9.5. Для этого перепишем чисовую последовательность 9.5 в общем виде:

$k =\quad 1,\quad 2,\quad 3$

$x_k = \quad x_1;\quad x_2;\quad x_3$

$y_k = \pm y_1;\ \pm y_2;\ \mp y_3$

$\Delta y_1;\ \Delta y_2$

$\Delta^2 y_1$

Формула общего члена трёхчленной последовательности 9.5 будет иметь вид 2.13:

$$y_k = y_1 + \Delta y_1 C_{k-1}^1 + \Delta^2 y_1 C_{k-1}^2$$

Приравняем её к нулю:

$$y_k = y_1 + \Delta y_1 C_{k-1}^1 + \Delta^2 y_1 C_{k-1}^2 = 0$$

Получим квадратное биномиальное уравнение.

Обозначим

$$\Delta^2 y_1 C_{k-1}^2 + \Delta y_1 C_{k-1}^1 + y_1 = 0$$

через

$$AC_{k-1}^2 + BC_{k-1}^1 + C = 0 ,$$

тогда по формуле 7.9:

$$AC_{k-1}^2 + BC_{k-1}^1 + C = 0{,}5Ak^2 + (B-1{,}5A)k + A - B + C = 0$$

преобразуем биномиальное уравнение в квадратное $ak^2 + bk + c = 0$, а по формуле

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

определим корень k.

Вместо того, что бы шаг за шагом приближаться к корню с заданной степенью точности, как это делают все известные математике способы уточнения корня на заданном отрезке, метод квадратных уравнений сразу определяет его. В этом и состаит основное преимущество данного метода перед всеми известными.

Поскольку $y=0$ расположен между $\pm y_2$ и $\mp y_3$, то и корень k будет расположен между порядковыми номерами $k-1=2$ и $k=3$, $2<k<3$, т.е. будет представлен дробным числом.

Но корень k является порядковым номером. Впервые в математике возникает необходимость представлять порядковый номер не натуральным, а действительным числом.

Поэтому числовая последовательность $k = 1,2,3,...$ порядковых номеров будет считаться последовательностью положительных чисел, в которой между двумя натуральными числами $k-1$ и k заключено бесконечное множество дробных действительных чисел v, причём $k-1 < v < k$.

Поскольку в квадратном уравнении корень k заключён в интервале $2 < k < 3$, то из двух корней определяют только один с целыми числом 2.

Полученный корень k квадратного уравнения будет содержать целую часть, обозначим её символом $[k]$, равную $[k] = 2$ и дробную, обозначим её символом $\{k\}$,$0 < \{k\} < 1$. Тогда корень k квадратного уравнения будет равен:

$$k = [k] + \{k\} \tag{9.6}$$

Корень k квадратного уравнения является корнем биномиального уравнения.

Поскольку биномиальное уравнение отличается от квадратного как степенью, так и числом членов, то точный корень квадратного уравнения будет приближённым для биномиального уравнения. Чем точнее будет определён корень квадратного уравнения, тем более высокая точность будет и у корня биномиального уравнения. Поэтому квадратное уравнение нужно решать с максимальной точностью.

Определив корень k на одном разнозначном отрезке $[\pm y_{k-1}; \mp y_k]$, определяют корни k на других разнозначных отрезках. Определив все корни, тем самым полностью решим биномиальное уравнение.

Так решаются биномиальные уравнения методом квадратных уравнений.

Биномиальное уравнение связывает нуль функции $(y = 0)$ с его порядковым номером k последовательности числовых значений этой функции.

Но порядковые номера числовых значений $y_1, y_2, y_3, ..., y_k$ могут быть поставлены во взаимооднозначное соответсвие с аргументами $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$ этой функции. Тогда нулю функции $y = 0$ с определённым порядковым действительным числом k будет поставлен во взаимооднозначное соответсвие аргумент x_k с тем же порядковым номером k в данной числовой последовательности. Поэтому, используя взаимо-однозначное соответствие 9.3 между нулём и корнем функции и, зная порядковый номер k нуля функции, определяют корень функции следующим образом.

Поскольку разность между $k = 3$ и $k = 2$ равна единице, то примем разность $x_3 - x_2$ за единицу, и тогда дробной части $\{k\}$ корня k будет соответствовать доля $\{x\}$ точного корня x и из пропорции:

$$\begin{matrix} x_3 - x_2 -------1 \\ \{x\} --------\{k\} \end{matrix} \tag{A}$$

получаем:

$$\{x\} = \{k\}(x_3 - x_2) \tag{9.7}$$

Здесь обе величины – $(x_3 - x_2)$ и $\{k\}$ известны.

Неизвестный корень x будет равен:

$$x = x_2 + \{x\} = x_2 + \{k\}(x_3 - x_2) \tag{9.8}$$

Если аргумент x функции $f(x)$ принимает значения натуральных чисел: $1,2,3,...$, т.е. порядковый номер k совпадает с аргументом x, $k=x$, то корень квадратного уравнения будет являться и корнем x функции $f(x)=0$. Тогда операции составления пропорции А и вычисления по формуле 9.8 отпадают.

Если достигнутая степень точности корня недостаточна, то процесс отделения корня методом квадратных уравнений повторяют, взяв за один из концов новых отрезков значения найденного корня x и $f(x)=y$.

Методом квадратных уравнений можно решать биномиальные уравнения двух типов. К первому типу относятся биномиальные уравнения, функции которых неизвестны.

Современная математика не знает ни одного способа решения таких уравнений, когда неизвестна сама функция, а имеется ряд значений её, например, полученных в результате эксперимента и требуется определить саму функцию и её корни. Биномиальная алгебра как раз даёт такой способ, рассмотрение которого начинается с главы 8.

Ко второму типу относятся все остальные виды конечных уравнений: алгебраические любой степени, трансцедентные, а также биномиальные уравнения, функции которых известны.

Покажем на примере решение уравнений обоих типов.

Пример 9.1. Первый тип. В главе 8 было задано биномиальное уравнение:

$$f(k)=1,42+0,72C_{k-1}^{1}-3,79C_{k-1}^{2}+6,42C_{k-1}^{3}-3,85C_{k-1}^{4}=0$$

и $y-$ отрезки:

$$1)[2,14;-0,93]\ \ 2)\ [-1,37;+3,39],$$

которые были поставлены во взаимоднозначное соответсвие с $x-$ отрезками:

$$1)[2,14;-0,93]\leftrightarrow[0,6;1,47]$$

$$2)[-1,37;+3,39]\leftrightarrow[2,61;4,17]$$

Требуется определить корни функции, при которых $f(x)=0$.

Решение. Рассмотрим первый отрезок $y=[2,14;-0,93]$, в котором

$$y_2=2,14;y_3=-0,93.$$

Для составления трёхчленной последовательности нужно определить какой-нибудь промежуточный член. Поскольку $y_2=2,14$, а $y_3=-0,93$, то определим, например, $y_{2,5}$, т.е.

$$f(k)=f(2,5)=1,42+0,72C_{2,5-1}^{1}-3,79C_{1,5}^{2}+6,42C_{1,5}^{3}-3,85C_{1,5}^{4}$$

Вычисляем биномиальные коэффициенты по формуле 1.22:

$$C_{1,5}^{1}=1,5;C_{1,5}^{2}=o,375;C_{1,5}^{3}=-0,0625;C_{1,5}^{4}=0,0234375$$

Получим:

$$f(2,5)=1,42+0,72\cdot1,5-3,79\cdot0,375+6,42(-0,0625)-3,85\cdot0,0234375=0,587$$

Составляем трёхчленную последовательность:

$k=\quad 1,\quad 2,\quad 3$

$y_k=\quad 2,14,\ \ 0,587,\ -0.93$

$-1,553;\ -1,517$

$0,036$

Из неё выводим биномиальное квадратное уравнение по формуле 2.13 и приравняем его к нулю:

$$2{,}14-1{,}553C_{k-1}^{1}+0{,}036C_{k-1}^{2}=0$$

Преобразуем его в алгебраическое уравнение по формуле 7.9:

$$AC_{k-1}^{2}+BC_{k-1}^{1}+C=0{,}5Ak^{2}(B-1{,}5A)k+A-B+C=0{,}5\cdot 0{,}036k^{2}+(-1{,}553-1{,}5\cdot 0{,}036)k+$$
$$+0{,}036+1{,}553+2{,}14=0{,}018k^{2}-1{,}607k+3{,}729=0$$

Определяем корень

$$k=\frac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}=\frac{1{,}607\pm\sqrt{1{,}607^{2}-4\cdot 0{,}018\cdot 3{,}729}}{0{,}036}=2{,}384$$

Число $k=2{,}384$ указывает местоположение нуля функции: он лежит между порядковыми номерами $k=2$ и $k>3$ на $2{,}384-2=0{,}384$ части единицы правее $k=2$, на отрезке $[0{,}587;-0{,}93]$, у которого $y_2=0{,}578$; $y_3=-0{,}93$.

Но левый конец этого отрезка $-[0{,}587;-0{,}93]$ имеет в числовой последовательности 8.1 порядковый номер $k=2{,}5$, т.е. $y_{2,5}=0{,}587$. Поэтому для определения корня биномиального уравнения нужно брать $0{,}384$ части не от единицы, $(3-2)$, а от $0{,}5(3{,}0-2{,}5)$, т.е.

$$\{k\}=0{,}384\cdot 0{,}5=0{,}192$$

Тогда корень k биномиального уравнения будет равен:

$$k=k_2+\{k\}=2{,}5+0{,}192=2{,}692$$

Теперь по этому корню $k=2{,}692$ биномиального уравнения в силу взаимооднозначного соответствия 9.3 определим корень x неизвестной функции. Исходными данными (стр. 42) здесь являются:

$x_3-x_2=1{,}47-0{,}6=0{,}87; k_2=2;$ корень $k=2{,}692; \{k\}=2{,}692-2=0{,}692$

Получим:

$$\{x\}=\{k_1\}(x_3-x_2)=0{,}692\cdot 0{,}87=0{,}602$$
$$x=x_2+\{x\}=0{,}6+0{,}602=1{,}202\approx 1{,}2$$

Получили корень $x=1{,}2$. Чтобы подтвердить или опровергнуть, нужно поставить эксперимент с введением аргумента $x=1{,}2$. Если он даст отличное от нуля значение, допустим, $f(1{,}2)=+0{,}23$ или $f(1{,}2)=-0{,}1$, тогда в первом случае берут орезок $x=[1{,}2;1{,}47]\leftrightarrow[0{,}23;-0{,}93]$, а во втором $x=[o{,}6;1{,}2;]\leftrightarrow[2{,}14;-0{,}1]$ и операцию отделения корня на отрезке методом квадратных уравнений повторяют.

Проделав аналогичные действия со вторым отрезком (стр. 43):

$$[-1{,}37;3{,}39]\leftrightarrow[2{,}61;4{,}17],$$

получим второй корень $x\approx 3{,}3$.

Покажем применение метода квадратных уравнений к решению конечных уравнений, например, алгебраических.

Пример 9.2. Второй тип. Дано $f(x)=x^{3}-10x^{2}+44x+29=0$. Отделить корень x на отрезке $x=[-0{,}66;-0{,}56]$ с точностью до $0{,}0001$.

Пример взят из учебника “Прктические занятия по высшей математике” часть 5, И.А. Каплан. Харьков, 1972 г. Стр. 29.

Решение.

1. $f(-0,66)=-4,683496; f(-0,56)=1,048384; f(-0,61)=-1,787981$

2. $k=$ 1, 2, 3

$x_1=$ $-0,66$; $-0,61$; $-0,56$

$y_k=-4,683496$; $-1,787981$; $+1,048384$

$2,895515$; $2,836365$

$-0,05915$

$$y_k=-4,683496+2,895515C_{k-1}^1-0,05915C_{k-1}^2$$

3. $y_k=-0,05915C_{k-1}^2+2,895515C_{k-1}^1-4,683496=\dfrac{-0,05915}{2}k^2+(2,895515-\dfrac{0,05915}{2}\cdot 3)k-$

$-0,05915-2,895515-4,683496=-0,029575k^2+2,89424k-7,638161=0$

4. $$k=\frac{-2,89424\pm\sqrt{2,89424^2-4(-0,029575)(-7,638161)}}{-0,05915}=2,627941$$

$$\{k\}=k-2=2,627941-2=0,627941$$

5. $$x=x_2+\{x\}=x_2+\{k\}(x_3-x_2)=-0,61+0,627941(-0,56+061)=-0,57860$$

И.А. Каплан даёт поиск этого корня на 6 страницах с пояснениями. Методом квадратных уравнений можно решать короче любые конечные уравнения, а не только алгебраические.

Обобщая всё сказанное, можно построить следующий алгоритм.

Алгоритм 9.1 отделения корня x уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[x_{k-1};x_k]$ методом квадратных уравнений.

Задаётся уравнение $f(x)=0$ и отрезок $[x_{k-1};x_k]$, содержащий корень x, причём на концах отрезка функция имеет противоположные знаки. Задаётся также точность корня до t знаков после запятой.

1. Зная $f(x)$ и $[x_{k-1};x_k]$, определяют с точностью $(t+1)$ знака после запятой концы $y-$ отрезка:

$$y_{k-1}=f(x_{k-1}); y_k=f(x_k); [y_{k-1};y_k]$$

2. Методом проб сокращают отрезки:

$$[x_{k-1};x_k]\leftrightarrow[y_{k-1};y_k]$$

до отрезков

$$[x_1;x_3]\leftrightarrow[\pm y_1;\mp y_3]$$

и одновременно определяют промежуточный член $\pm y_2$ трёхчленной последовательности

$$\pm y_1;\pm y_2;\mp y_3$$

3. Из полученной трёхчленной последовательности, например, 2

$k=$ 1, 2, 3

$x_k=$ x_1; x_2; x_3

$y_k = \pm y_1; \pm y_2; \mp y_3$

$\Delta y_1; \Delta y_2$

$\Delta^2 y_1$

составляют биномиальное квадратное уравнение по формуле 2.10:

$$y_k = y_1 + \Delta y_1 C_{k-1}^1 + \Delta^2 y_1 C_{k-1}^2 = \Delta^2 y_1 C_{k-1}^2 + \Delta y_1 C_{k-1}^1 + y_1 = AC_{k-1}^2 + BC_{k-1}^1 + C = 0$$

4. Полученное биномиальное уравнение переводят в алгебраическую форму:

$$AC_{k-1}^2 + BC_{k-1}^1 + C = 0{,}5Ak^2 + (B - 1{,}5A)k + A - B + C = 0 \quad (7.9)$$

5. Алгебраическое уравнение решают по формуле:

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

и определяют корень k, заключённый в промежутке $2 < k < 3$.

Все вычисления в пунктах 1 – 5 производят с точностью $(t+1)$ знаков после запятой, а в подкоренном выражении – с точностью $2(t+1)$ знаков после запятой.

6. Целую часть $[k] = 2$ корня k отбрасывают, а с помощью его дробной части $\{k\},(k = [k] + \{k\} = 2 + \{k\})$, определяют корень x по формуле:

$$x = x_2 + \{x\} = x_2 + \{k\}(x_3 - x_2) \quad (9.8)$$

7. Если точность корня недостаточна, то операцию отделения повторяют, зажав корень x в более узкий отрезок.

Глава 10. Биномиальный интерполяционный многочлен.

Порядковые номера $k = 1,2,3,...$ членов числовой последовательности 2.1, а также индексы биномиальных коэффициентов в формуле 2.7 представлены натуральными числами.

Однако биномиальные коэффициенты C_{k-1}^{n} имеют смысл и при действительном положительном k :

$$C_{k-1}^{n} = \frac{(k-1)(k-2)...(k-n)}{n!} \tag{1.19}$$

Это означает, что по формуле 2.7 общего члена числовой последовательности 2.1 можно вычислять и промежуточные значения между членами этой последовательности. Например, если дана последовательность кубов натуральных чисел:

$$k^3 = 1,8,27,64,...$$

то по формуле общего члена этой последовательности:

$$k^3 = 1 + 7C_{k-1}^{1} + 12C_{k-1}^{2} + 6C_{k-1}^{3}$$

можно определить куб любого действительного положительного числа, например:

$$3,782^3 = 1 + 7C_{3,782-1}^{1} + 12C_{2,782}^{2} + 6C_{2,782}^{3} = 54,730223$$

где

$$C_{3,782-1}^{1} = 2,782; C_{2,782}^{2} = 2,478761; C_{2,782}^{3} = 0,6461306$$

В исчислении конечных разностей, при обработке экспериментальных данных, иногда возникает такая задача.

Пусть на отрезке $[a;b]$ с произвольным шагом задан ряд значений неизвестной функции $f(x)$, где $a \le x \le b; [a;b]$ – область определения функции $f(x)$:

$$f(x_1) = f(a) = y_1; f(x_2) = y_2; ...; f(x_k) = y_k; ...; f(x_t) = f(b) = y_t$$

Требуется определить функцию $f(x)$, котороя давала бы не только значения $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, ..., f(x_t) = y_t$, но и промежуточные значения в любой точке отрезка $[a;b]$.

Построив ранговую систему из заданной числовой последовательности:

$$\begin{array}{llllll}
k = & 1, & 2, & ..., & k-1, & k,...,t \\
x_k = & x_1, & x_2, & ..., & x_{k-1}, & x_k,...,x_t \\
y_k = & y_1, & y_2, & ..., & \pm y_{k-1}, & \pm y_k,...,y_t \\
 & \Delta y_1, & \Delta y_2 & & &
\end{array}$$

....

$$\Delta^p y_1, \Delta^p y_2$$

....

$$\Delta^{k-1} y_1$$

и взяв из неё или определив по формуле 2.17 первые разности, аппроксимируют искомую функцию по формуле 2.7:

$$y_k = y_1 + \Delta y_1 C_{k-1}^1 + \Delta^2 y_1 C_{k-1}^2 + ... + \Delta^p y_1 C_{k-1}^p + ... + \Delta^{k-1} y_1 C_{k-1}^{k-1}$$

По этой формуле можно определить не только каждый член y_k заданной последовательности y_k, но и любое промежуточное значение между членами этой последовательности.

Для определения промежуточных значений y:

$$y_{k-1} < y < y_k$$

при известном аргументе x:

$$x_{k-1} < x < x_k$$

выявляют дробную часть $\{k\}$ порядкового номера $k-1$ по формуле

$$\{k\} = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \tag{10.1}$$

и определяют числовое значение функции в заданной точке x по формуле:

$$f(x) = y_1 + \Delta y_1 C_{k+\Delta k-1}^1 + \Delta^2 y_1 C_{k+\Delta k-1}^2 + ... + \Delta^p y_1 C_{k+\Delta k-1}^p + .. + \Delta^{k+\Delta k-1} y_1 C_{k+\Delta k-1}^{k+\Delta k-1} \tag{10.2}$$

Формула 10.2 ничем не отличается от формулы 2.7.

Определение 10.1. Формула 2.7 члена последовательности 2.1:

$$f(x) = y_1 + \Delta y_1 C_{k-1}^1 + \Delta^2 y_1 C_{k-1}^2 + ... + \Delta^p y_1 C_{k-1}^p + .. + \Delta^{k-1} y_1 C_{k-1}^{k-1}$$

для определения промежуточных значений между членами последовательности называется биномиальным интерполяционным многочленом.

В биномиальном интерполяционном многочлене нижние индексы представлены действительными положительными числами, а верхние – натуральными.

Биномиальный интерполяционный многочлен можно широко применять при исследовании неизвестных функций, аппроксимации таблиц, графиков функций. Этому будут посвящены следующие главы.

Глава 11. Аппроксимация таблиц биномиальным многочленом.

Пусть с произвольным шагом задана таблица числовых значений неизвестной функции $f(x)$:

$$\{x_k\} = x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k, ..., x_t$$

$$\{y_k\} = y_1, y_2, ..., y_{k-1}, y_k, ..., y_t \qquad (11.1)$$

В последовательности $\{x_t\}$ числовые значения аргумента x возрастают: $x_1 < x_2 < ... < x_t$, в последовательности $\{y_k\}$ среди числовых значений существует разброс по абсолютной величине и знакам.

Для практического применения данной таблицы необходимо определять промежуточные значения между заданными величинами.

Для этой цели по формуле 2.7 строят биномиальный интерполяционный многочлен. Как бы ни была длинна таблица, такой многочлен всегда можно построить. Число его членов равно числу членов таблицы. Поэтому чем длинней такой многочлен, тем неудобнее им пользоваться, выписывая каждый раз все его члены. Поэтому есть смысл всякую таблицу, содержащую более 10 членов, разбивать на куски объёмом в 4-7 членов и для каждой такой субтаблицы строить свой биномиальный интерполяционный многочлен. С помощью этого многочлена определяют все промежуточные значения между ординатами x_{k-1} и x_k, используя формулы 2.7, 10.1 и 1.22.

Поскольку функция $f(x)$ неизвестна, то нет возможности сравнить значения, полученные при помощи биномиального многочлена, с действительными значениями функции. Поэтому точность определения промежуточных значений остаётся неизвестной.

При определении промежуточных значений заданной таблицы предполагается, что функция между соседними числовыми значениями аргумента монотонно возрастает или убывает. Если это условие не соблюдается, т.е. между соседними точками x_{k-1} и x_k расположен локальный экстремум функции, то определять промежуточные значения функции, не зная этого экстремума, бессмысленно, оно почти всегда будет ложным.

Если же функция между точками x_{k-1} и x_k монотонно возрастает или убывает, то её значение при помощи биномиального многочлена будет определено более точно, хотя степень точности остаётся неизвестной. Её можно определить, если поставить опыт с использованием аргумента x и полученное значение $f(x) = y$ сравнить с y, полученным при помощи биномиального многочлена.

Пример 11.1. Задана таблица неизвестной функции $f(x) = y$:

$$f(3,8) = 14,6; f(6,3) = 22,4; f(7,9) = 9,3; f(10,2) = -1,8; f(12,4) = -6,7;$$

Построить интерполяционный биномиальный многочлен.

Решение. 1. Составляем ранговую систему:

$k = \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5$

$x_k = \quad 3,8; \quad 6,3; \quad 7,9; \; 10,2; \; 12,4$

$y_k = \quad 14,6; \; 22,4; \quad 9,3; \; -1,8; \; -6,7$

$7,8; \; -13,1; \; -11,1; \; -4,9$

$-20,9; \quad 2; \quad 6,2$

$22,9; \quad 4,2$

$-18,7$

2. Выводим из неё многочлен по формуле 2.7:

$$y_k = 14,6 + 7,8C_{k-1}^1 - 20,9C_{k-1}^2 + 22,9C_{k-1}^3 - 18,7C_{k-1}^4$$

Подставив порядковый номер $k = 5$, получим $y = -6,7$, значит, интерполяционный многочлен составлен верно.

3. При помощи найденного многочлена можно определять все числовые значения функции на отрезке $x = [3,8;12,4]$. Определим, например, $f(9,3)$.

Порядковый номер k этого числового значения $y_k = f(9,3)$ будет иметь целую часть $[k] = 3$, поскольку $7,9 < 9,3 < 10,2$, а $7,9 \leftrightarrow 3;10,2 \leftrightarrow 4$.

Определим дробную часть $\{k\}$ по формуле 9.7:

$$\{x\} = \{k\}(x_3 - x_2),$$

поскольку здесь известны из заданной таблицы величины

$x_2 = 7,9; x_3 = 10,2; \{x\} = x - x_2 = 9,3 - 7,9 = 1,4$

и тогда:
$$\{k\} = \frac{\{x\}}{x_3 - x_2} = \frac{1,4}{10,2 - 7,9} = 0,6087,$$

а

$$k = [k] + \{k\} = 3 + 0,6087 = 3,6087.$$

Определяем $y_{3,6087} = 14,6 + 7,8C_{3,6087-1}^1 - 20,9C_{2,6087}^2 - 18,7C_{2,6087}^3$.

Биномиальные коэффициенты определяем по формуле 1.22:

$$C_{2,6087}^1 = 2,6087; C_{2,6087}^2 = 2,6087 \cdot \frac{1,6087}{2} = 2,0983; C_{2,6087}^3 = 2,0983 \cdot \frac{0,6087}{3} = 0,4257;$$

$$C_{2,6087}^4 = 0,4257 \cdot \frac{-0,3913}{4} = -0,0416;$$

Получаем:

$$y_{3,6087} = 14,6 + 7,8 \cdot 2,6087 - 20,9 \cdot 2,0983 + 22,9 \cdot 0,4257 - 18,7 \cdot (-0,0416) = 1,62$$

Теперь рассмотрим таблицу числовых значений известной функции. Если процесс вычисления промежуточных её значений трудоёмок или сложный, то есть смысл эту функцию аппроксимировать биномиальным многочленом, по которому процесс вычисления промежуточных значений менее трудоёмок или проще. В качестве примера рассмотрим функцию $\ln x$.

Пример 11.2. Дана

$f(x) = \ln x; \ln 10 = 2{,}302585; \ln 20 = 2{,}995732; \ln 30 = 3{,}401197; \ln 40 = 3{,}688879; \ln 50 = 3{,}912023$

Определить $\ln 23{,}3$ при помощи биномиального интерполяционного многочлена.

Решение. 1. Из заданных числовых значений $f(x)$ строим ранговую систему:

$k =$	1,	2,	3,	4,	5
$x_k =$	10,	20,	30,	40,	50
$y_k =$	2,302585;	2,995732;	3,401197;	3,688879;	3,912023
	0,693147;	0,405465;	0,287682;	0,223144	
	–0,287682;	–0,117783;	–0,064538		
	0,169899;	0,053245			
	–0,116654				

2. Определяем биномиальный интерполяционный многочлен по формуле 2.7:

$$y_k = 2{,}302585 + 0{,}693147 C_{k-1}^1 - 0{,}287682 C_{k-1}^2 + 0{,}169899 C_{k-1}^3 - 0{,}116654 C_{k-1}^4$$

3. $\ln 23{,}3 = ?; x = 23{,}3; x_2 < x < x_3; 20 < 23{,}3 < 30; \{x\} = x - x_2 = 23{,}3 - 20 = 3{,}3; 2 < k < 3;$

$$k = [k] + \{k\}; [k] = 2; \{k\} = \frac{\{x\}}{x_3 - x_2} = \frac{3{,}3}{30 - 20} = 0{,}33; k = [k] + \{k\} = 2 + 0{,}33 = 2{,}33$$

4. Определяем по формуле 1.22 биномиальные коэффициенты:

$$C_{k-1}^n = C_{2,33-1}^n = C_{1,33}^n$$

$$C_{1,33}^1 = 1{,}33; C_{1,33}^2 = 0{,}21945; C_{1,33}^3 = -0{,}0490105; C_{1,33}^4 = 0{,}0204618$$

5. $y_{2,33} = 2{,}302585 + 0{,}693147 C_{1,33}^1 - 0{,}287682 C_{1,33}^2 + 0{,}169899(-0{,}0490105) -$

$-0{,}116654 \cdot 0{,}0204618 = 3{,}1506249$

Действительное значение $\ln 23{,}3 = 3{,}1484533$. Точность определениия $\ln 23{,}3$ оказалась равной $0{,}01$.

Допустим, что нужно определить $\ln 23{,}3$ с точностью $0{,}000001$. Полученная точность ниже на несколько порядков, поэтому строят второй многочлен. Зная функцию $\ln x$, создают новую таблицу с более коротким шагом, допустим с $\Delta x = 1$ на более узком отрезке, допустим, $x = [20; 25]$:

$\ln 20 = 2{,}995732273; \ln 21 = 3{,}044522438; \ln 22 = 3{,}091042453;$

$\ln 23 = 3{,}135494216; \ln 24 = 3{,}178053830; \ln 25 = 3{,}218875825$

Составив ранговую систему, и определив первые разности, получим новый биномиальный многочлен:

$y_k = 2{,}995732273 + 0{,}048790165 C_{k-1}^1 - 0{,}00227015 C_{k-1}^2 + 0{,}000201898 C_{k-1}^3 -$

$-0{,}000025795 C_{k-1}^4 + 0{,}000004222 C_{k-1}^5$

В новой ранговой системе $x = 23{,}3$, будет расположен между $x_4 = 23$ и $x_5 = 24$, а его порядковый номер $k = [k] + \{k\}$ в интервале $4 < [k] + \{k\} < 5$.

Тогда:

$$\{x\} = x - x_4 = 23,3 - 23 = 0,3$$

$$\{k\} = \frac{\{x\}}{x_5 - x_4} = \frac{0,3}{24 - 23} = 0,3$$

$$k = [k] + \{k\} = 4 + 0,3 = 4,3$$

$C^1_{4,3-1} = 3,3; C^2_{3,3} = 3,795; C^3_{3,3} = 1,6445; C^4_{3,3} = 0,1233375; C^5_{3,3} = -0,01726725$

$y_{4,3} = 2,995732273 + 0,048790165 \cdot 3,3 - 0,00227015 \cdot 3,795 + 0,000201898 \cdot 1,6445 -$

$-0,000025795 \cdot 0,1233375 + 0,000004222 \cdot (-0,01726725) = 3,14845336512$

Действительное значение $\ln 23,3 = 3,148453361$.

Уменьшив шаг таблицы в 10 раз, т.е. на порядок, мы повысили точность искомого результата на 6 порядков! Теперь на отрезке $x = [20;25]$ при помощи полученного биномиального многочлена можно будет определять любой $\ln x$ с точностью до 8-го знака после запятой.

Аналогично обстоит дело и с $f(x) = \lg x$. Например, для $y = \lg x$ на отрезке $x = [1;10]$ при шаге $\Delta x = 1$ получим последовательность:

$k =$ 1, 2, 3,...,10

$x_k =$ 1, 2, 3,...,10

$y_k = 0,0;\ 0,301029996;\ 0,477121255;...;1,000000000$

Определив первые разности всех подпоследовательностей, получим биномиальный многочлен:

$y_k = 0 + 0,301029996C^1_{k-1} - 0,124938737C^2_{k-1} + 0,073786214C^3_{k-1} - 0,050662414C^4_{k-1} +$

$+0,03783857C^5_{k-1} - 0,029820371C^6_{k-1} + 0,024393119C^7_{k-1} - 0,020506311C^8_{k-1} + 0,017602615C^9_{k-1}$

Десятичные логарифмы, полученные при помощи этого биномиального многочлена на отрезке $x = [1;10]$ будут верны с точностью до 4-5-го знака после запятой. Например, для $x = 3,729 (k = 3,729)$, получим $y_{3,729} = \lg 3,729 = 0,571577875$, действительное же значение $\lg 3,729 = 0,571592383$, т.е. точность равна $0,0001$.

Чтобы получить десятичный логарифм ещё большей точности, допустим, до 8-9-го знака после запятой, отрезок и шаг нужно сократить, допустим, взять отрезок $[3,5;4,5]$ и шаг $\Delta x = 0,1$. Тогда получим числовую последовательность:

$k =$ 1 2 3.....11

$x_k =$ 3,5; 3,6; 3,7;...;4,5

$y_k = 0,544068044;\ 0,5563025;\ 0,568201724;...;0,653212513$

Определив первые разности, получим биномиальный многочлен:

$y = 0,544068044 + 0,012234456C^1_{k-1} - 0,000335232C^2_{k-1} + 0,00001788C^3_{k-1} -$

$-0,000001389C^4_{k-1} + 0,000000132C^5_{k-1} - 0,000000001C^6_{k-1} - 0,000000024C^7_{k-1} +$

$+0,000000037C^8_{k-1} - 0,000000043C^9_{k-1} + 0,00000003C^{10}_{k-1}$

По этому биномиальному многочлену можно определить $\lg 3,729$ с точностью до девятого знака. Числовому значению $x = 3,729$ будет соответсвовать порядковый номер:

$$k+\{k\}=k+\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}=3+\frac{3{,}729-3{,}7}{3{,}8-3{,}7}=3{,}29$$

и тогда:

$$y_{3,29}=0{,}544068044+0{,}0{,}012234456C^1_{3,29-1}-0{,}000335232C^2_{2,29}+0{,}00001788C^3_{2,29}-$$

$$-0{,}000001389C^4_{2,29}+0{,}000000132C^5_{2,29}-0{,}000000001C^6_{2,29}-0{,}000000024C^7_{2,29}+$$

$$+0{,}000000037C^8_{2,29}-0{,}000000043C^9_{2,29}+0{,}00000003C^{10}_{2,29}=0{,}57159238293\approx 0{,}571592383$$

т.е. получили результат с точностью до 9-го знака после запятой.

Аналогично можно аппроксимировать биномиальным интерполяционным многочленом гиперболические и тригонометрические функции. Никаких особенностей при этом не будет, поэтому их не будем рассматривать. Аппроксимация же показательной функции резко отличается от аппроксимации всех остальных функций, поэтому рассмотрим её отдельно в следующей главе.

В заключении отметим, что биномиальный интерполяционный многочлен имеет существенное преимущество перед интерполяционными формулами Ньютона, Стерлинга и Бесселя. Если первая интерполяционная формула Ньютона применяется для интерполирования функций при значениях аргумента, расположенного в начале таблицы, а вторая – для расположенных в конце её, а формулы Стерлинга и Бесселя – при значениях аргументя, расположенного в середине таблицы, то биномиальный интерполяционный многочлен имеет одинаковую силу при аргументах, расположенных в любой части таблицы, кроме того, он намного проще формул Стерлинга и Бесселя.

Глава 12. Аппроксимация показательной функции биномиальным многочленом.

Пусть показательная функция $y = a^x$ задана в виде таблицы на отрезке $\left[x; x + k \cdot \Delta x\right]$ порядковых номеров, где Δx – шаг показателя степени, $k = 0,1,2,3,...$ – количество равных шагов, тогда:

$$y_1 = a^x; y_2 = a^{x+\Delta x}; y_3 = a^{x+2\Delta x}; ...; y_k = a^{x+(k-1)\Delta x}; y_{k+1} = a^{x+k\cdot\Delta x}$$

Если эту таблицу числовых значений показательной функции представить в виде числовой последовательности, то получим:

$$y_k = a^x; a^{x+\Delta x}; a^{x+2\Delta x}; ...; a^{x+(k-1)\Delta x}; a^{x+k\cdot\Delta x}$$

В отношении такой последовательности имеют силу следующие теоремы.

Теорема 12.1. Для числовой последовательности:

$$y_k = a^x; a^{x+\Delta x}; a^{x+2\Delta x}; ...; a^{x+(k-1)\Delta x}; a^{x+k\cdot\Delta x} \tag{12.1}$$

первый член подпоследовательности $\left\{\Delta^p y_k\right\}$ равен:

$$\Delta^p y_1 = a^x (a^{\Delta x} - 1)^p \tag{12.2}$$

Доказательство.

$$\Delta y_1 = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1); \Delta y_2 = a^{x+2\Delta x} - a^{x+\Delta x} = a^{x+\Delta x}(a^{\Delta x} - 1); \Delta^2 y_2 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = a^x(a^{\Delta x} - 1)^2$$

Теорема верна для $p = 1,2$. Допустим, что она верна и для $p = k - 1$, тогда:

$$\Delta^{k-1} y_1 = a^x (a^{\Delta x} - 1)^{k-1}$$

Докажем, что она будет верна и для $p = k$.

Если $\Delta^{k-1} y_1 = a^x (a^{\Delta x} - 1)^{k-1}$, то $\Delta^{k-1} y_2 = \Delta^{k-1} y_1 \cdot a^{\Delta x} = a^x (a^{\Delta x} - 1)^{k-1} \cdot a^{\Delta x} = a^{x+\Delta x}(a^{\Delta x} - 1)^{k-1}$.

Тогда:

$$\Delta^k y_1 = \Delta^{k-1} y_2 - \Delta^{k-1} y_1 = a^{x+\Delta x}(a^{\Delta x} - 1)^{k-1} - a^x(a^{\Delta x} - 1)^{k-1} = a^x(a^{\Delta x} - 1)^{k-1}(a^{\Delta x} - 1) = a^x(a^{\Delta x} - 1)^k = a^x(a^{\Delta x} - 1)^p$$

что и доказывает теорему.*

Теорема 12.2. Для числовой последовательности 12.1 отношение первых разностей следущей подпоследовательности $\left\{\Delta^p y_k\right\}$ к предыдущей $\left\{\Delta^{p-1} y_k\right\}$ постоянно и равно:

$$\omega = \frac{\Delta^p y_1}{\Delta^{p-1} y_1} = a^{\Delta x} - 1 \tag{12.3}$$

Доказательство. Из 12.2 следует:

$$\omega = \frac{\Delta^p y_1}{\Delta^{p-1} y_1} = \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)^p}{a^x (a^{\Delta x} - 1)^{p-1}} = a^{\Delta x} - 1 \ *$$

Соотношение 12.3 и является константой для данной числовой последовательности.

Для числовой последовательности показательной функции $y = a^{x+k\cdot\Delta x}$ с постоянным шагом Δx при $x = const$ эта константа ω определяется из соотношения 12.3 при $p = 1$ по формуле:

$$\omega = \frac{\Delta y_1}{y_1} = a^{\Delta x} - 1 \tag{12.4}$$

Зная ω (12.4), по первому y_1 нуль-последовательности показательной функции можно определить первые разности всех подпоследовательностей до любого $p > 1$ по формуле 12.3:

$$\Delta^p y_1 = \omega \cdot \Delta^{p-1} y_1$$

Но первые разности $\Delta^p y_1$ всех подпоследовательностей можно определять и по формуле 12.5.

Теорема 12.3.

$$\Delta^p y_1 = y_1 \cdot \omega^p \qquad (12.5)$$

Доказательство. Из $\Delta^p y_1 = a^x (a^{\Delta x} - 1)^p$ (12.2), $y_1 = a^x$ (12.1), $a^{\Delta x} - 1 = \omega$ (12.4) следует:

$$\Delta^p y_1 = a^x (a^{\Delta x} - 1)^p = y_1 \cdot \omega^p \ *$$

Для показательной функции $y = a^{x + k \cdot \Delta x}$ для определения первых разностей не нужно строить ранговую систему, как для остальных функций, а определять их проще и экономичней по формулам 12.4 – 12.5.

Процесс определения первых разностей может быть бесконечен $p \to \infty$.

Поэтому множеству первых разностей, как и множество подпоследовательностей будет стремиться к бесконечности. Но это означает, что и биномиальный многочлен 2.7:

$$y_k = y_1 + \Delta y_1 C_{k-1}^1 + \Delta^2 y_1 C_{k-1}^2 + ... + \Delta^p y_1 C_{k-1}^p + .. + \Delta^{k-1} y_1 C_{k-1}^{k-1}$$

при $p \to \infty$ так же будет бесконечным, т.е. он превратится в бесконечный ряд слагаемых.

Определениие 12.1. Биномиальный многочлен 2.7 при бесконечном ряде слагаемых называется биномиальным рядом.

Этот ряд может сходиться, если существует предел его сходимости, и расходиться, если он отсутствует. Чтобы выяснить условия, при которых он сходится или расходится, нужно рассмотреть общий член $\Delta^p y_1 C_{k-1}^p$ и определить, при каких условиях он стремится к бесконечности или к нулю при $p \to \infty$.

Первый сомножитель $\Delta^p y_1$ уже был рассмотрен. Он равен (12.5):

$$\Delta^p y_1 = \omega^p y_1 .$$

Здесь y – первый член нуль-последовательности – величина постоянная, т.е. $y_1 = const, \omega$ – безразмерная величина, так же постоянная.

В отношении предела первых разностей всех подпоследовательностей при $p \to \infty$ имеет силу следущая теорема.

Теорема 12.4.

$$\lim_{p \to \infty} \omega^p y_1 = 0 \text{, если } \omega < 1, \omega = const, y_1 = const \qquad (12.6)$$

$$\lim_{p \to \infty} \omega^p y_1 = \infty \text{, если } \omega > 1, \omega = const, y_1 = const \qquad (12.7)$$

Доказательство. Если $\omega < 1$, то степень ω^p при $\omega = const$, $p \to \infty$ стремится к нулю:

$$\lim_{p \to \infty} \omega^p = 0$$

Произведение бесконечно малой величины на ограниченную, согласно одной из теорем об основных свойствах бесконечно малых величин, есть величина бесконечно малая, а это озночает, что $\lim_{p \to \infty} \omega^p y_1 = 0$ при $\omega < 1, y = const, \omega = const$.

Если же $\omega > 1$, то степень ω^p при $\omega = const$, $p \to \infty$ стремится к бесконечности, и тогда $\lim_{p \to \infty} \omega^p y_1 = \infty$ при $\omega > 1$, $\omega = const$, $y = const$ *

Рассматрим теперь второй сомножитель – биномиальный коэффициент C_{k-1}^{p}. Он может быть представлен как целым, так и дробным числом. Его верхний индекс p всегда представлен натуральным числом, за исключением случая $p = 0$.

При $p \to \infty$ нижний индекс $k-1$ в одном и том же биномиальном многочлене величина постоянная, т.е. $k-1 = const$. Если $k-1$ – натуральное число, то биномиальный многочлен из бесконечного при $p \to \infty$ превращается в конечный с определённым числом членов, равному $k-1 = p$, потому что при $p > k-1, C_{k-1}^{p} = 0$.

Дробный биномиальный коэффициент C_{k-1}^{p} при $p \to \infty$ и

$$\frac{k-p}{p} > 1 \tag{12.8}$$

положителен и растёт до соотношения

$$\frac{k-p}{p} \le 1, \tag{12.9}$$

после чего начинает снижаться и стремиться к нулю:

$$C_{k-1}^{p} \to 0, \tag{12.10}$$

а при

$$p > k \tag{12.11}$$

начинает поочерёдно менять знак.

Таким образом, при дробном $k-1$ в любом случае при $p \to \infty$, $C_{k-1}^{p} \to 0$.

Теорема 12.5. Биномиальный многочлен 2.7, аппроксимирующий показательную функцию $y = a^{x+k\cdot\Delta x}$ сходится при $\omega < 1, p \to \infty$, где

$$\omega = a^{\Delta x} - 1.$$

Доказательство. Общий член ряда $\Delta^{p} y_1 C_{k-1}^{p} = \omega^{p} y_1 C_{k-1}^{p}$ при $p \to \infty$ имеет $C_{k-1}^{p} \to 0$ (12.10), а так же $\lim\limits_{p\to\infty} \omega^{p} y_1 = 0$ (12.6). Отсюда следует, что и $\Delta^{p} y_1 C_{k-1}^{p} \to 0$ при $p \to \infty$.

Тогда в силу признака Лейбница, биномиальный многочлен будет представлять собою сходящийся биномиальный ряд.*

Что больше разность $1-\omega$ при $\omega < 1$, тем быстрее устремляется к нулю общий член $\omega^{p} y_1 C_{k-1}^{p}$, поэтому соотношение ω имеет смысл назвать коэффициентом сходимости биномиального ряда.

Определение 12.2. Соотношение

$$\omega = a^{\Delta x} - 1$$

называется коэффициентом сходимости биномиального ряда.

Чем он меньше, тем быстрее сходится биномиальный ряд.

Поскольку он бесконечен при $p \to \infty$, то возникает вопрос: до какого его члена производить вычисления? Ответ довольно прост: до k, взятого отрезка $\left[x; x + k\cdot\Delta x\right]$. Это в том случае, если он указан.

Если отрезок не указан, тогда должна быть известна точность σ вычисления функции, выражающаяся числом верных знаков после запятой. Зная σ, биномиальный многочлен составляют до такого члена $\Delta^{p} y_1 C_{k-1}^{p}$, в котором $\Delta^{p} y_1 < \sigma$.

На основании всего изложенного можно построить следующий алгоритм.

Алгоритм 12.1 аппроксимации показательной функции $f(x)=a^x$ биномиальным многочленом на заданном отрезке $[x;x_t]$.

Для аппроксимации показательной функции $y=a^x$ биномиальным многочленом должны быть известны следующие данные: a, отрезок $[x;x_t]$, в котором $x_t = x + k\cdot\Delta x$, степень точности σ вычисления многочлена.

1. Взяв произвольно шаг $\Delta x<1$, причём $\dfrac{1}{\Delta x}=c$ – натуральному числу, любым из известных в математике методов определяют числовые значения двух величин:

$$y_1 = f(x) = a^x;\omega = a^{\Delta x}-1$$

с максимальной точностью (до 8-12 знаков после запятой).

Если получили $\omega \ge 1$, то процесс определения ω повторяют, уменьшив шаг Δx.

2. Зная y и ω, определяют последовательно первые члены подпоследовательностей по одной из формул:

$$\Delta^p y_1 = \Delta^{p-1} y_1 \cdot \omega \quad (12.3)$$

или

$$\Delta^p y_1 = y_1 \cdot \omega^p \quad (12.5)$$

до $\Delta^p y_1 < \sigma$ или до k, взятого из x_t.

Точность определния первых разностей всех подпоследовательностей равна 8-12 знаков после запятой.

3. Составляют искомый интерполяционный биномиальный многочлен по формуле 2.7:

$$y_k = y_1 + \Delta y_1 C_{k-1}^1 + \Delta^2 y_1 C_{k-1}^2 + ... + \Delta^p y_1 C_{k-1}^p$$

Пример 12.1. Апроксимировать функцию $y=10^x$ биномиальным многочленом при $x\ge 3$ с точностью $\sigma = 0{,}000001$.

Решение. 1. $y=10^x=10^{3+\Delta x(k-1)}$. Дадим произвольный шаг $\Delta x = 0{,}1$, получим $y=10^{3+0,1(k-1)}$.

2. $y=10^3=1000;\omega=10^{\Delta x}-1=0{,}258925412$

3. $\Delta y_1 = y_1\cdot\omega = 258{,}925412;\Delta^2 y_1 = y_1\cdot\omega = 67{,}0423689793$

$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_1\cdot\omega = 17{,}3589730094;\Delta^4 y_1 = \Delta^3 y_1\cdot\omega = 4{,}49467923835$

$\Delta^5 y_1 = \Delta^4 y_1\cdot\omega = 1{,}1637866736;\Delta^6 y_1 = \Delta^5 y_1\cdot\omega = 0{,}30133394394$

$\Delta^7 y_1 = \Delta^6 y_1\cdot\omega = 0{,}07802301558;\Delta^8 y_1 = \Delta^7 y_1\cdot\omega = 0{,}02020214146$

$\Delta^9 y_1 = \Delta^8 y_1\cdot\omega = 0{,}0052308478;\Delta^{10} y_1 = \Delta^9 y_1\cdot\omega = 0{,}00135439942$

$\Delta^{11} y_1 = \Delta^{10} y_1\cdot\omega = 0{,}00035068843;\Delta^{12} y_1 = \Delta^{11} y_1\cdot\omega = 0{,}00009080215$

$\Delta^{13} y_1 = \Delta^{12} y_1\cdot\omega = 0{,}00002351098;\Delta^{14} y_1 = \Delta^{13} y_1\cdot\omega = 0{,}00000608759$

$\Delta^{15}y_1 = \Delta^{14}y_1 \cdot \omega = 0,00000157623; \Delta^{16}y_1 = \Delta^{15}y_1 \cdot \omega = 0,00000040813$

4.Составляем интерполяционный многочлен по формуле 2.7:

$$y_k = 1000 + 258,925412C_{k-1}^1 + 67,0423689793C_{k-1}^2 + 17,3589730094C_{k-1}^3 + 4,49467923835C_{k-1}^4 +$$
$$+1,1637866736C_{k-1}^5 + 0,30133394394C_{k-1}^6 + 0,07802301558C_{k-1}^7 + 0,02020214146C_{k-1}^8 +$$
$$+0,0052308478C_{k-1}^9 + 0,00135439942C_{k-1}^{10} + 0,00035068843C_{k-1}^{11} + 0,00009080215C_{k-1}^{12} +$$
$$+0,00002351098C_{k-1}^{13} + 0,00000608759C_{k-1}^{14} + 0,00000157623C_{k-1}^{15} + 0,00000040813C_{k-1}^{16}$$

По этой формуле можно вычислять значения функции $y = 10^{3+0,1(k-1)}$ при $k-1 \le 16$, как целом, так и дробном.

При целом k его значения берутся из таблицы биномиальных коэффициентов или вычисляются по формуле (12.13). Например, определим числовое значение функции $y = 10^{3,5}$. Здесь $y = 10^{3,5} = 10^{3+0,1(k-1)}; 3 + 0,1(k-1) = 3,5; k = 6$, тогда:

$$y_6 = 1000 + 258,925412C_{6-1}^1 + 67,0423689793C_5^2 + 17,3589730094C_5^3 + 4,49467923835C_5^4 +$$
$$+1,1637866736C_5^5 = 3162,27766 .$$

Вычисление функции $y = 10^x = 10^{3+\Delta x(k-1)}$ с дробными значениями k определяетсся по следующему алгоритму.

Алгоритм 12.2 вычисления показательной функции по биномиальному многочлену.

Пусть задана функция $y = a^{x+\Delta x(k-1)}$ при известных a, x и Δx и требуется определить $y = a^b$ при $b > x$.

1. Из уравнения $b = x + \Delta x(k-1)$, в котором b, x и Δx известны, определяем k по формуле:

$$k = \frac{b-x}{\Delta x} + 1 \qquad (12.12)$$

2. Биномиальные коэффициенты, как целые, так и дробные, определяются по видоизменённой формуле 1.22:

$$C_{k-1}^p = C_{k-1}^{p-1} \cdot \frac{k-p}{p} \qquad (12.13)$$

3. Определяют числовое значение функции по биномиальному многочлену до такого p, при котором

$$\Delta^p y_1 C_{k-1}^p < \sigma,$$

где σ – точность вычисления функции.

Пример 12.2. Определить по биномиальному многочлену примера 12.1 числовое значение $y = 10^{3,4683}$ с точностью $\sigma = 0,000001$.

Решение. 1. Определяем дробный порядковый номер k по формуле 12.12:

$$y = 10^{3,4683} = 10^{3+0,1(k-1)}; k = \frac{3,4683 - 3}{0,1} + 1 = 5,683$$

2. Определяем биномиальные коэффициенты при $k = 5,683; C_{k-1}^p = C_{5,683-1}^p = C_{4,683}^p$:

$$C^1_{4,683} = 4,683; C^2_{4,683} = 4,683 \cdot \frac{5,683-2}{2} = 8,6237445; C^3_{4,683} = 8,6237445 \cdot \frac{2,683}{3} = 7,7125021645$$

$$C^4_{4,683} = 3,2450352857; C^5_{4,683} = 0,44327182002; C^6_{4,683} = -0,02341952783; C^7_{4,683} = 0,00440621688$$

$$C^8_{4,683} = -0,00127615056; C^9_{4,683} = 0,00047033238; C^{10}_{4,683} = -0,00020304249; C^{11}_{4,683} = 0,00009814336$$

Дальнейшие $C^p_{4,683}$ вычислять не следует, поскольку

$$\Delta^{11} y_1 \cdot C^{11}_{4,683} < \sigma . \qquad (12.14)$$

Определяем числовое значение функции:

$$y_{5,683} = 1000 + 258,925412C^1_{5,683-1} + 67,0423689793C^2_{4,683} + 17,3589730094C^3_{4,683} + 4,49467923835C^4_{k-1} +$$
$$+1,1637866736C^5_{4,683} + 0,30133394394C^6_{4,683} + 0,07802301558C^7_{4,683} + 0,02020214146C^8_{4,683} +$$
$$+0,0052308478C^9_{4,683} + 0,00135439942C^{10}_{4,683} + 0,00035068843C^{11}_{4,683} = 2939,679612$$

Действительные значение $y = 10^{3,4683} = 2939,679609$.

Биномиальный многочлен удобнее использовать при малых значениях $k(k < 10)$. При увеличении k объём вычислений возрастает из-за увеличения числа членов биномиального многочлена.

Например, если по биномиальному многочлену примера 12.1 определять числовое значение функции $y = 10^{4,5} = 10^{4+0,1(k-1)}$ при $k = 16$, то придётся произвести 15 умножений и сложений, в то время как для получения того же результата по биномиальному многочлену функции $y = 10^{4,5} = 10^{4+0,1(k-1)}$ при $k = 6$ придётся произвести 5 сложений и умножений, т.е. в 3 раза меньше.

Пример 12.3. Вычислить $e^{1,2}$ и $e^{2,1}$, если известно $e^{0,1} = 1,105170918$.

Решение. Если степень точности σ не указана, то подразумевается, что она на один знак меньше, чем у заданного числа $y = a^{\Delta x}$, в нашем случае $\sigma = 0,00000001$.

1.

1. Здесь $x = 0; \Delta x = 0,1; \omega = e^{0,1} - 1 = 0,105170918$.

2. Определяем первые члены подпоследовательностей по формуле 12.5:

$$y_1 = e^0 = 1; \Delta y_1 = y_1 \cdot \omega = 0,105170918; \Delta^2 y_1 = \Delta y_1 \cdot \omega = 0,01106092199; \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_1 \cdot \omega = 0,00116328732$$

$$\Delta^4 y_1 = \Delta^3 y_1 \cdot \omega = 0,000122344; \Delta^5 y_1 = \Delta^4 y_1 \cdot \omega = 0,00001286703; \Delta^6 y_1 = \Delta^5 y_1 \cdot \omega = 0,00000135324$$

$$\Delta^7 y_1 = \Delta^6 y_1 \cdot \omega = 0,00000014232; \Delta^8 y_1 = \Delta^7 y_1 \cdot \omega = 0,00000001497; \Delta^9 y_1 = \Delta^8 y_1 \cdot \omega = 0,00000000157$$

$$\Delta^{10} y_1 = \Delta^9 y_1 \cdot \omega = 0,00000000017; \Delta^{11} y_1 = \Delta^{10} y_1 \cdot \omega = 0,00000000002; \Delta^{12} y_1 = \Delta^{11} y_1 \cdot \omega = 0$$

3. Составляем биномиальный интерполяционный многочлен по формуле (2.7):

$$y_k = 1 + 0,105170918C^1_{k-1} + 0,01106092199C^2_{k-1} + 0,00116328732C^3_{k-1} + 0,000122344C^4_{k-1} +$$
$$+0,00001286703C^5_{k-1} + 0,00000135324C^6_{k-1} + 0,00000014232C^7_{k-1} + 0,00000001497C^8_{k-1} +$$
$$+0,00000000157C^9_{k-1} + 0,00000000017C^{10}_{k-1} + 0,00000000002C^{11}_{k-1} \qquad A$$

4. Из $e^{1,2} = e^{0+0,1(k-1)}$ определяем k по формуле (12.12):

$$k=\frac{b-x}{\Delta x}+1=\frac{1,2-0}{0,1}=13$$

Если $k>p$, а $\Delta^p y_1=0$ при $p=\max$, как это получалось в нашем случае, то это означает, что был взят слишком малый шаг Δx. Если на отрезке $\left[x;x_t\right]$ нужно произвести много вычислений y_k, то есть смысл вернуться к началу действий, взяв новый шаг $\Delta x_1>\Delta x$ и все действия повторить сначала. И тогда $p=\max$, у которого $C_{k-1}^p=0$, будет отодвинут в сторону увеличения.

5. Вычисляем числовое значение функции $y=e^{1,2}$ по многочлену А при $k=13$:

$$y_{13}=1+0,105170918C_{13-1}^1+0,01106092199C_{12}^2+0,00116328732C_{12}^3+0,000122344C_{12}^4+$$
$$+0,00001286703C_{12}^5+0,00000135324C_{12}^6+0,00000014232C_{12}^7+0,00000001497C_{12}^8+$$
$$+0,00000000157C_{12}^9+0,00000000017C_{12}^{10}+0,00000000002C_{12}^{11}=3,32011692371$$

Действительное значение $e^{1,2}=3,320116922$. Заданная точность достигнута.

2.

По многочлену А можно определять $y=e^x$ при $0<x<1,2$, но нельзя при $x>1,2$, потому что при $k>13$ все первые разности подпоследовательностей равны нулю. Поэтому для вычисления функции $y=e^{2,1}$ нужно составлять следующий биномиальный многочлен, взяв $y=e^{1,2}=3,320116922$ за основу. Однако заметим, поскольку $y=e^{1,2}=y_1$ имеет $\sigma=10^{-8}$, то все y_k, определённые по новому многочлену , будут иметь точность $\sigma=10^{-7}$.

Если нужно сохранить прежнюю точность, тогда следует определить $e^{1,2}$ другими математическими методами с точностью до $\sigma=10^{-9}$.

1. $y_k=e^{2,1}=?$. Известны величины: $y=e^{1,2}=3,320116922$;

$x_t=2,1;\Delta x=0,1;\omega=e^{0,1}=0,105170918$.

2. Из $e^{2,1}=e^{1,2+0,1(k-1)}$ определяем k по формуле:

$$k=\frac{b-x}{\Delta x}+1=\frac{2,1-1,2}{0,1}=10.$$

3. Определяем первые разности подпоследовательностей до $p=\max=k-1=10-1=9$.

$y_1=3,32011692;\Delta y_1=y_1\cdot\omega=0,34917974434;\Delta^2 y_1=0,03672355426;\Delta^3 y_1=0,00386224991;$
$\Delta^4 y_1=0,00040619637;\Delta^5 y_1=0,00004272005;\Delta^6 y_1=0,00000449291;\Delta^7 y_1=0,00000047252;$
$\Delta^8 y_1=0,0000000497;\Delta^9 y_1=0,00000000523$

4. Составляем многочлен:

$$y_k=3,32011692+0,34917974434C_{k-1}^1+0,03672355426C_{k-1}^2+0,00386224991C_{k-1}^3+0,00040619637C_{k-1}^4+$$
$$+0,00004272005C_{k-1}^5+0,00000449291C_{k-1}^6+0,00000047252C_{k-1}^7+0,0000000497C_{k-1}^8+0,00000000523C_{k-1}^9$$

Этот многочлен можно использовать для вычисления функци $y=e^x$ на отрезке $1,2\le x\le 2,1$.

Подставив $k=10$, получим:

$$y_{10} = 3,32011692 + 0,34917974434 C_9^1 + ... + 0,00000000523 C_9^9 = 8,166169901147 \approx 8,1661699$$

Действительное значение $e^{2,1} = 8,166169912$. Заданная точность $\sigma = 10^{-7}$ достигнута.

Глава 13. Аппроксимация биномиальным многочленом графика функции на отрезке $\left[x_1;x_t\right]$.

Пусть в декартовой системе координат задан график неизвестной функции. Требуется выразить эту функцию биномиальным многочленом на заданном отрезке $\left[x_1;x_t\right]$ оси абцисс.

Этот отрезок может захватывать как весь график, так и его часть.

Посмотрим на график любой функции и мысленно выделим на нём те точки, которые, если их соединить прямыми линиями, давали бы упрощённый контур данной кривой. Тогда в точках пересечения прямых линий будут образованы углы. Принимая это во внимание, все точки графика функции можно подразделить на угловые и промежуточные.

Определение 13.1. Точка графика функции, в окрестности которой первая производная меняет знак или резко величину, называется угловой.

Угловые точки подразделяются на два вида: точка экстремума и точка изгиба.

В точках экстремума (max и min) первая производная меняет знак, поэтому они являются угловыми. И в самом деле, если в окрестности точки экстремума по обе её стороны провести касательные к кривой линии, то они образуют острый угол.

На графиках многих функций имеется множество точек, в окрестностях которых первая производная резко меняет величину, но не меняет знака. Посколько первая производная означает угла наклона касательной в данной точке кривой, то резкая смена величины первой производной означает изгиб графика функции в данной точке.

Определение 13.2. Точка графика функции, в окрестности которой первая производная резко меняет величину, но не меняет знака, называется точкой изгиба, или изгибочной.

Определение 13.3. Точка графика функции, не являющимся угловыми, называется промежуточными.

Промежуточные точки расположенны между угловыми. Множество угловых точек конечно, множество промежуточных – бесконечно.

Промежуточные точки лежат как в точках изгиба, так и на плавных участках кривой. Но на графике имеются ещё две точки, которые задаются по условию – это точки начала и конца отрезка $\left[x_1;x_t\right]$ оси абцисс.

Определение 13.4. Точки x_1 и x_t – начала и конца отрезка графика функции – называются граничными.

Точка x_1 называется первой или начальной, а x_t – второй или конечной.

Граничные точки могут быть угловыми, например, точками экстремума, а могут быть и промежуточными.

Между граничными и угловыми точками расположены промежуточные.

Если между угловыми точками или между граничной и соседней угловой расположен относительно большой отрезок графика функции, то на нём можно задать одну или несколько промежуточных точек так, что бы их расположение более точно отражало контур кривой линии.

Все перечисленные виды точек – угловые, граничные и выбранные промежуточные должны более или менее точно отражать контур графика функции на заданом отрезке $\left[x_1;x_t\right]$, потому что по этим точкам будет определяться биномиальный многочлен.

Определение 13.5. Точки графика функции, по которым определяется биномиальный многочлен, называются репрезентативными.

Реперезентативность означает представительность. Действительно, репрезентативные точки представляют собою контур графика функции.

Репрезентативных точек на графике функции не должно быть менее трёх, однако, большое их количество нежелательно, ибо они дают длинный биномиальный многочлен, с которым трудно оперировать. Оптимальный биномиальный многочлен должен содержать не менее 3 и не более 10 членов. Если на графике функции получается много репрезентативных точек, т.е. более 10, то его следует разбить на более короткие участки и каждый отрезок исследовать отдельно.

Определив репрезентативные точки графика функции на заданном отрезке $\left[x_1;x_t\right]$, выявляют их координаты, опустив перпендикуляры из каждой репрезентативной точки на оси ox и oy.

Выпишем последовательно репрезентативные точки и их координаты слева направо.

Первой точкой будет левая граничная – начало графика или его отрезка, следующими – последоватeлно лежащие от неё вправо угловые или промежуточные точки. Последней точкой будет правая граничная. Значения аргумента x будут возрастать от точки к точке, а значения y могут изменяться произвольным образом.

Зная координаты точек, составляют из них числовую последовательность:

$$y_k = y_1; y_2; ...; y_{k-1}; y_k; ...; y_t \tag{2.1}$$

а под ней – её ранговую систему 2.3, после чего составляют интерполяционный биномиальный многочлен по формуле 2.7.

Ранговая система 2.3 обладает одним удивительным свойством, о котором мы ещё нигде не упоминали, но которое весьма полезно при аппроксимации графика функции биномиальным многочленом.

Пусть дана числовая последовательность:

$$y_k = y_1; y_2; y_3; y_4 y_5; y_6 y_7$$

Её можно рассматривать как совокупность вложенных друг в друга числовых последовательностей, различающихся последовательно одно от другого лишь первым членом:

$y_1; y_2; y_3; y_4; y_5; y_6; y_7$

$y_2; y_3; y_4; y_5; y_6; y_7$

$y_3; y_4; y_5; y_6; y_7$

$y_4; y_5; y_6; y_7$

$y_5; y_6; y_7$

причём каждая следущая последовательность является подмножеством предыдущей.

Рассмотрим теперь ранговую систему первой последовательности:

$y_k = \quad y_1; \quad y_2; \quad y_3; \quad y_4; \quad y_5; \quad y_6; \ y_7$

$\Delta y_k = \quad \Delta y_1; \ \Delta y_2; \ \Delta y_3; \ \Delta y_4; \Delta y_5; \Delta y_6$

$\Delta^2 y_k = \Delta^2 y_1; \Delta^2 y_2; \Delta^2 y_3; \Delta^2 y_4; \Delta^2 y_5$

$\Delta^3 y_k = \Delta^3 y_1; \Delta^3 y_2; \Delta^3 y_3; \Delta^3 y_4$

$\Delta^4 y_k = \Delta^4 y_1; \Delta^4 y_2; \Delta^4 y_3$

$\Delta^5 y_k = \Delta^5 y_1; \Delta^5 y_2$

$\Delta^6 y_k = \Delta^6 y_1$

Эта ранговая система также является совокупностью ранговых систем, вложенных одна в другую, различающихся друг от друга только первым столбцом, причём каждая последущая ранговая система является подмножеством предыдущей.

Ранговая система, начинающаяся столбцом y_2, соответсвует второй числовой последовательности $y_2; y_3; ...; y_7$; ранговая система, начинающаяся со столбца y_3, соответсвует последовательности $y_3; y_4; ...; y_7$; ранговая система, начинающаяся со столбца y_4, соответсвует числовой последовательности $y_4; y_5; ...; y_7$ и, наконец, ранговая система, начинающаяся со столбца y_5, соответсвует последней числовой последовательности $y_5; y_6; y_7$.

Каждая из этих ранговых систем даёт свой биномиальный многочлен. Первая ранговая система, начинающаяся столбцом y_1, даёт по формуле 2.7 биномиальный многочлен:

$$y_k = y_1 + \Delta y_1 C_{k-1}^1 + \Delta^2 y_1 C_{k-1}^2 + \Delta^3 y_1 C_{k-1}^3 + \Delta^4 y_1 C_{k-1}^4 + \Delta^5 y_1 C_{k-1}^5 + \Delta^6 y_1 C_{k-1}^6$$

вторая ранговая система, начинающаяся столбцом y_2, даёт другой биномиальный многочлен:

$$y_k = y_2 + \Delta y_2 C_{k-1}^1 + \Delta^2 y_2 C_{k-1}^2 + \Delta^3 y_2 C_{k-1}^3 + \Delta^4 y_2 C_{k-1}^4 + \Delta^5 y_2 C_{k-1}^5$$

третья:

$$y_k = y_3 + \Delta y_3 C_{k-1}^1 + \Delta^2 y_3 C_{k-1}^2 + \Delta^3 y_3 C_{k-1}^3 + \Delta^4 y_3 C_{k-1}^4$$

четвёртая:

$$y_k = y_4 + \Delta y_4 C_{k-1}^1 + \Delta^2 y_4 C_{k-1}^2 + \Delta^3 y_4 C_{k-1}^3$$

пятая:

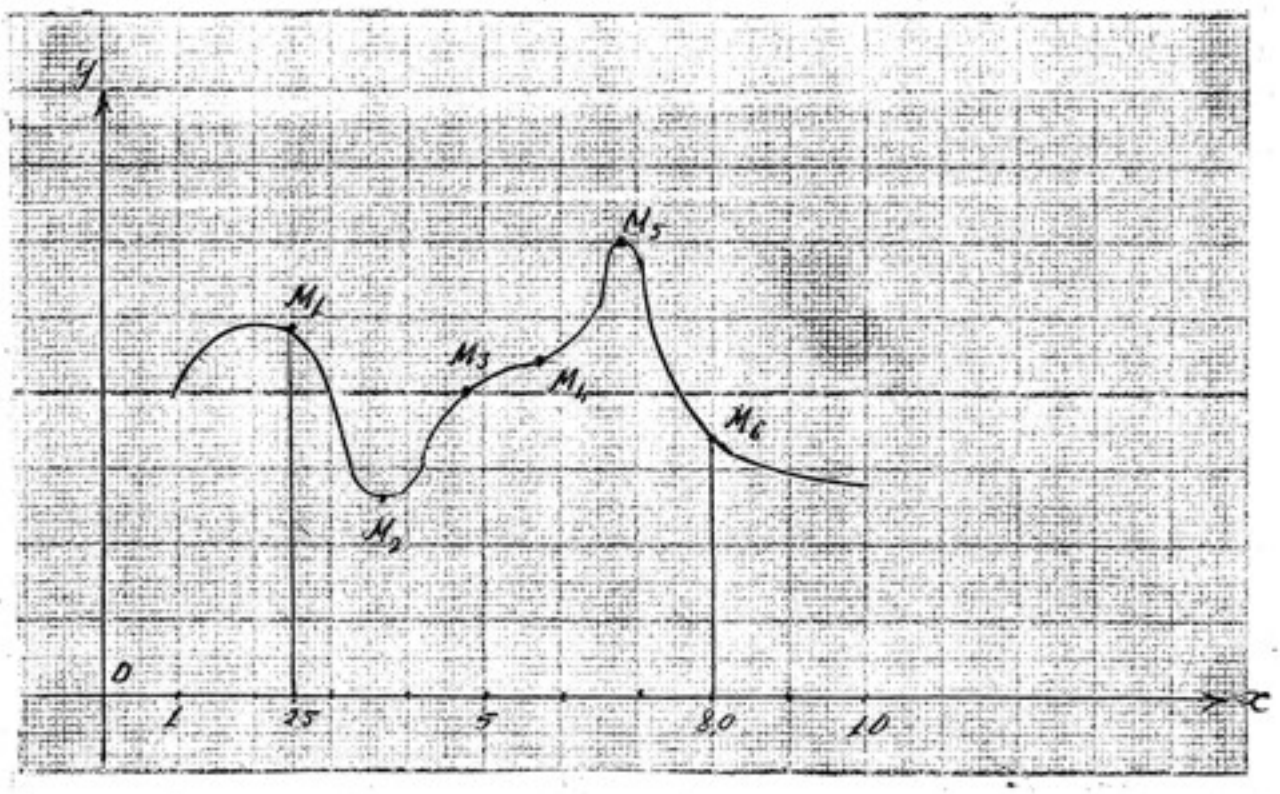
$$y_k = y_5 + \Delta y_5 C_{k-1}^1 + \Delta^2 y_5 C_{k-1}^2$$

Пусть нижние индексы $1,2,...,7$ числовой последовательности $y_1, y_2, ... y_7$, означает порядковые номера репрезентативных точек, тогда первый биномиальный многочлен аппроксимирует функцию на отрезке $[x_1; x_7]$, второй – на отрезке $[x_2; x_7]$, третий – на $[x_3; x_7]$, четвёртый – на $[x_4; x_7]$, пятый – на $[x_5; x_7]$.

Отсюда следует, что одна ранговая система первой, наиболее длинной, числовой последовательности даёт возможность аппроксимировать график функции не только на отрезке $[x_1; x_7]$, но и на любом его меньшем отрезке – $[x_2; x_7]$, $[x_3; x_7]$, $[x_4; x_7]$, $[x_5; x_7]$ концами которых являются репрезентативные точки.

Поясним всё это на примере.

Пример 13.1. Определить биномиальую формулу неизвестной функции $f(x)$ на отрезке $[2{,}5; 8{,}0]$ оси абсцисс (чертёж 13.1).



(13.1)

Решение. 1. Граничные точки $M(2{,}5;y_1);M_t(8{,}0;y_t)$ известны из условия.

Определим визуально угловые точки функции $f(x)$ на отрезке $x=[2{,}5;8{,}0]$. Ими будут точки M_2, M_3, M_4, M_5. Точка $M_6 = M_t$ будет граничной.

2. Опустим перпендикуляры на оси ox и oy из этих точек, получим их координаты:

$$M_1(2{,}5;4{,}8);M_2(3{,}7;2{,}6);M_3(4{,}8;4{,}0);M_4(5{,}7;4{,}4);M_5(6{,}8;6{,}0)M_6(8{,}0;3{,}4)$$

3.Составляем из полученных координат числовую последовательность y_k, а из неё – ранговую систему:

$k =$ 1, 2, 3, 4, 5, 6

$x =$ 2,5; 3,7; 4,8; 5,7; 6,8; 8,0

$y_k =$ 4,8; 2,6; 4,0; 4,4; 6,0; 3,2

–2,2; 1,4; 0,4; 1,6; –2,8

+3,6; –1,0; 1,2; –4,4

–4,6; 2,2; –5,6

+6,8; –7,8

–14,6

4. Составляем биномиальный многочлен по формуле 2.7:

$$y_k = 4{,}8 - 2{,}2C_{k-1}^1 + 3{,}6C_{k-1}^2 - 4{,}6C_{k-1}^3 + 6{,}8C_{k-1}^4 - 14{,}6C_{k-1}^5 \quad \text{(A)}$$

Этот биномиальный многочлен предназначен для определения всех числовых значений функции $f(x)$ на отрезке $x=[2{,}5;8{,}0]$. Но из полученной ранговой системы можно получить ещё и следующие биномиальные многочлены:

$$y_k = 2{,}6 + 1{,}4C_{k-1}^1 - C_{k-1}^2 + 2{,}2C_{k-1}^3 - 7{,}8C_{k-1}^4$$

для отрезка $x = [3{,}7; 8{,}0]$, столбец $k = 2$

$$y_k = 4 + 0{,}4C_{k-1}^1 + 1{,}2C_{k-1}^2 - 5{,}6C_{k-1}^3$$

для отрезка $x = [4{,}8; 8{,}0]$, столбец $k = 3$

$$y_k = 4{,}4 + 1{,}6C_{k-1}^1 - 4{,}4C_{k-1}^2$$

для отрезка $x = [5{,}7; 8{,}0]$, столбец $k = 4$, потому что полученная ранговая система представляет собою составную систему, сложенную из нескольких ранговых систем-подмножеств.

Заметим, что порядковый номер $k = 1$ для начальной точки указанных отрезков графика функции будет смещаться вправо от одной ранговой системы-подмножества к другой.

Рассмотрим биномиальный многочлен А . Он аппроксимирует собою функцию $f(x)$ на отрезке $x = [2{,}5; 8{,}0]$. На графике видно, что функция монотонно возрастает или убывает между репрезентативными точками, являющимися точками экстремумов. Если полученный многочлен А действительно верно отображает функцию $f(x)$, изображённую на графике (чертёж 13.1), то он должен при $x = [2{,}5; 8{,}0]$ давать такие числовые значения y_k, которые заключены в интервале $y_{k-1} < y_k < y_{k+1}$, концами которого являются ближайшие к y_k репрезентативные точки.

Чтобы проверить соответствие полученного многочлена А графику функции (чертёж 13.1), задают несколько значений аргумента в разных точках графика и получаемые значения $f(x) = y_k$ сравнивают с графическими. Например, определим значение функции в точке $x = 5{,}4$.

Точка $x = 5{,}4$ расположена между точками $x_3 = 4{,}8$ и $x_4 = 5{,}7$, т.е. $x_3 < x < x_4$ или $4{,}8 < 5{,}4 < 5{,}7$, поэтому она имеет целую часть $[k] = 3$ своего порядкового номера и дробную часть $\{k\}$ (10.1), т.е. порядковый номер

$$k = [k] + \{k\} = [k] + \frac{x - x_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}} = 3 + \frac{5{,}4 - 4{,}8}{5{,}7 - 4{,}8} = 3{,}66667$$

Определив биномиальные коэффициенты $C_{k-1}^p = C_{3,66667-1}^p = C_{2,66667}^p$ по формуле 2.13, определяют числовое значение многочлена А:

$$y_{3,66667} = 4{,}8 - 2{,}2C_{2,66667}^1 + 3{,}6C_{2,66667}^2 - 4{,}6C_{2,66667}^3 + 6{,}8C_{2,66667}^4 - 14{,}6C_{2,66667}^5 = 4{,}2$$

Если посмотреть на график функции (чертёж 13.1), то в точке $x = 5{,}4$ функция действительно имеет значение $y \approx 4{,}2$.

Аналогично получается со всеми точками, расположенными в середине графика функции.

Однако, если промежуточная точка расположена между первой и второй репрезентативными точками, или между предпоследней и последней, то результаты вычислений могут выходить за границу интервала $y_{k-1} < y_k < y_{k+1}$.

Например, определим числовое значение функции примера 13.1 в точке $x = 3{,}0$ (чертёж 13.1):

$$[k]+\{k\}=1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=1,41667$$

$$y_k=y_{1,41667}=4,8-2,2C^1_{1,41667-1}+3,6C^2_{0,41667}-4,6C^3_{0,41667}+6,8C^4_{0,41667}-14,6C^5_{0,41667}=2,44$$

Но соседние репрезентативные точки, между которыми расположена эта промежуточная, имеют ординаты соответсвенно $y_1=4,8$ и $y_2=2,6$, причём функция между ними монотонно убывает.

Значит, ордината $y=2,44$ промежуточной точки является неверной.

Это происходит по следующей причине. Биномиальная формула в данном примере содержит 6 членов и при вычислении ординаты промежуточной точки $M_{1,41667}$ используются все 6 членов этой формулы. Но если вычислять ординату точки с целым порядковым номером, допустим M_2, то в биномиальной формуле будут использованы только первые три члена формулы, остальные члены превращаются в нуль, потому что $C^p_{k-1}=0$ при $k-1<p$. Вот эти составные члены, которые не равны нулю при дробном $k-1$ и искажает результат. В самом деле, если вычислять ординату промежуточной точки $M_{1,41667}$ при трёх членах формулы:

$$y_{1,41667}=4,8-2,2C^1_{0,41667}+3,6C^2_{0,41667}=3,4 \qquad \text{В}$$

то получим ординату $y_{1,41667}=3,4$, которая удовлетворяет неравенству

$$2,6<3,4<4,8\,.$$

Причиной того, что ордината промежуточной точки между первой и второй репрезентативными точками выходит за пределы интервала $y_1<y_k<y_2$ являются два фактора.

Первый: биномиальные коэффициенты C^p_{k-1} при $k-1<p$ попеременно меняют знак.

Второй: биномиальный многочлен А имеет одночлены, попеременно меняющие знак.

При определении $y_{1,41667}$ отрицательные C^p_{k-1} перемножаются на положителеные коэффициенты одночленов. В итоге все последующие одночлены вычитаются из суммы трёх первых одночленов многочлена В, поэтому и получается в итоге результат $y_{1,41667}=2,44$.

Чтобы этого не произошло, нужно либо отсечь избыток этих отрицательных одночленов, как это сделано в многочлене В, либо изменить порядковый номер точки $M_{1,41667}$. Это можно достичь, поместив две добавочные точки между точками x_1 и $M_{1,41667}$, например, с аргументами $x_2=2,55$ и $x_3=2,6$. Тогда точка $M_{1,41667}$ передвинется к центру многочлена и изменит свой порядковый номер.

Аналогично получается и с промежуточной точкой, расположенной между предпоследней и последней репрезентативными точками. Например, точка $M_{5+\{k\}}$ с аргументом $x=7,4$ на графике черттежа 13.1 имеет дробный порядковый номер $[k]+\{k\}=5,5$ и ординату:

$$y_{5,5}=4,8-2,2C^1_{4,5}+3,6C^2_{4,5}-4,6C^3_{4,5}+6,8C^4_{4,5}-14,6C^5_{4,5}=6,2$$

которая выходит за предел неравенства $3,2<y_{5,5}<6,0$.

Причина здесь противоположная: отсутствие одночленов с отрицательными C^p_{k-1}, т.е. при $k-1<p$. Чтобы они появились, нужно добавить хотя бы две точки перед концом интервала,

например, точки с аргументами $x = 7{,}9$ и $7{,}95$. Тогда биномиальный многочлен удлинится и точка $M_{5,5}$ сдвинется к центру многочлена.

Введём дополнительные точки между первой и второй, предпоследней точками, получим видоизменённую прежнюю последовательность:

$k =$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

$x =$ 2,5; 2,55; 2,6; 3,7; 4,8; 5,7; 6,8; 7,9; 7,95; 8,0

$y_k =$ 4,8; 4,6; 4,5; 2,6; 4,0; 4,4; 6,0; 3,5; 3,4; 3,3;3,2

Построив ранговую систему, получим многочлен:

$$y_k = 4{,}8 - 0{,}2C_{k-1}^{1} + 0{,}1C_{k-1}^{2} - 1{,}9C_{k-1}^{3} + 7C_{k-1}^{4} - 16{,}4C_{k-1}^{5} + 32{,}3C_{k-1}^{6} - 62{,}3C_{k-1}^{7} + 126{,}1C_{k-1}^{8} - 264{,}7C_{k-1}^{9}$$

Этот биномиальный многочлен даёт всё промежуточные точки в пределах заданных интервалов. Например, для точки с аргументом $x = 5{,}4$ он даёт прежнюю ординату $y_k = 4{,}2$; для точки $x = 3{,}0$ даёт $y_{3,36364} = 3{,}05$, а для точки $x = 7{,}4 - y = 5{,}5$.

Данный многочлен совершенно отличен от первого многочлена А, и точнее, полнее отражает график функции (чертёж 13.1), чем многочлен А.

Введём следующие два определения.

Определение 13.1. Биномиальный многочлен, выдающий числовые значения $y_{[k]+\{k\}}$, выходящие за пределы интервала $y_k < y_{[k]+\{k\}} < y_{k+1}$ (13.1) называется некондиционными.

Определение 13.2. Биномиальный многочлен, выдающий числовые значения $y_{[k]+\{k\}}$, расположенные внутри интервала 13.1, называется кондиционным.

Один и тот же многочлен может быть одновременно как кондиционным, так и некондиционным, в зависимости от того, какие аргументы задаются.

Чтобы преобразовать некондиционный многочлен в кондиционный, достаточно добавить по две дополнительные репрезентативные точки очень близко к концам отрезка графика функции.

Глава 14. Взятие неберущихся интегралов.

В высшей математике существует три способа взятия неберущихся определённых интегралов - способ прямоугольников, способ трапеций и способ парабол или способ Симпсона. Наиболее точный - это способ Симпсона.

Но и он страдает существенными недостатками: интервал интегрирования нужно разбивать на чётное число равных отрезков, причём это число должно быть 8 - 10 и более.

Этих недостатков лишён предлагаемый способ - взятие неберущихся определённых интегралов методом биномиальной алгебры.

Неопределённые интегралы этим методом взять невозможно. Чётное или нечётное число отрезков разной длины равно 3 - 7, оптимальное число 5.

Покажем на примере сущность этого метода.

Этим методом можно брать как берущиеся, так и неберущиеся интегралы. Но взятие берущихся интегралов по основной таблице интегралов будет проще и экономнее, чем методом биномиальной алгебры. Но по основной таблицы интегралов нельзя взять неберущиеся интегралы и вот тогда следует применять метод биномиальной алгебры, при меньших затратах труда дающий более точные результаты, чем метод Симпсона.

Возьмём простейший пример берущегося интеграла, например,

$$y = 3\int_2^3 x^2\,dx = 3\frac{x^3}{3})_2^3 = x^3)_2^3 = 3^3 - 2^3 = 19$$

Отрезок интервала интегрирования разделим $3-2=1$ разделим на 4 части, равные или неравные. Но если разделить на неравные части, например, 2,0, 2,4, 2,5, 2,6, 3,0, то получим густоту чисел 2,4, 2,5, 2,6 и разреженное пространство между числами 2,0 и 2,4. 2,6 и 3,0.

Получилось, что мы взяли всего три точки 2,0, 2,5, и 3,0. От этого снижается точность вычисления интеграла. Поэтому лучше интервал интегрирования разбивать равномерно, т.е. на равные участки. В нашем примере это будет равно $1:4=0,25$ и тогда получим ряд:

$$x = 2{,}0, 2{,}25, 2{,}5, 2{,}75, 3{,}0\ .$$

После этого составляем биномиальное уравнение подинтегрального выражения $y = 3x^2$.

$k=$	1	2	3	4	5
$x_k =$	2,0;	2,25;	2,5;	2,75;	3,0
$y_k =$	12,0;	15,1875;	18,75;	22,6875;	27,0
	3,1875;	3,5625;	3,9375;	4,3125	
	0,375;	0,375;	0,375		

По этой ранговой системе составляем биномиальное уравнение:

$$y = 12 + 3{,}1875C_{k-1}^1 + 0{,}375C_{k-1}^2$$

Взять от него определённый интеграл можно двумя способами.

Первый способ - перевести биномиальное уравнение в алгебраическое и от него взять этот определённый интеграл.

Второй способ - взять определённый интеграл от биномиального уравнения.

Рассмотрим первый способ.

На стр. 34 дан перевод биномиального уравнения в алгебраическое:

$$M = AC_{k-1}^2 + BC_{k-1}^1 + C = 0{,}5Ak^2 + (B - 1{,}5A)k + A - B + C$$

Здесь $A = 0{,}375, B = 3{,}1875, C = 12$.

Получаем:

$$y = 0,5 \cdot 0,375k^2 + (3,1875 - 1,5 \cdot 0,375)k + 0,375 - 3,1875 + 12 = 0,1875k^2 + 2,625k + 9,1875$$

Биномиальное уравнение преобразовано в алгебраическое.

Чтобы взять интеграл от этого уравнения, следует учесть следующее: если в уравнении $y = 3\int_2^3 x^2\,dx$ был неизвестный аргумент x с пределами интегрирования $3 - 2 = 1$, то полученное алгебраическое уравнение $y = 0,1875k^2 + 2,625k + 9,1875$ имеет неизвестным аргумент k с пределами интегрирования $5 - 1 = 4$.

Берём интеграл от полученного алгебраического многочлена:

$$y = \int_1^5 (0,1875k^2 + 2,625k + 9,1875)\,dk = (0,1875\frac{k^3}{3} + 2,625\frac{k^2}{2} + 9,1875)_1^5 =$$

$$= 0,0625(k_1^3 - k_2^3) + 1,3125(k_1^2 - k_2^2) + 9,1875(k_1 - k_2) = 0,0625(5^3 - 1^3) + 1,3125(5^2 - 1^2) +$$

$$+9,1875(5 - 1) = 76$$

Эта величина равномерно распадается на 4 интервала длиной $L = 1$. Но нам нужно определить всего один интервал, потому что разница между интервалами в первоначальном подинтегральном выражении $y = 3x^2$ была равна $3 - 2 = 1$. На один интервал падает число $76 : 4 = 19$. Это и есть искомый интеграл от первоначального интеграла $y = 3\int_2^3 x^2\,dx$.

Так решаются все примеры на определение искомого интеграла от неберущихся любого типа. Их можно решать по следующему алгоритму.

Пусть задан неберующийся определённый интеграл $y = \int_a^b f(x)dx$ (1)

Алгоритмы вычисления неберущихся определённых интегралов методом биномиальной алгебры.

Алгоритм 14.1 (алгебраический).

1). Разность $b - a$ пределов интегрирования интеграла (1) разбивают на 3-7 равных отрезков, оптимальное число 5, получают отрезок длиной dx.

2). В подинтегральную функцию $f(x)$ поочерёдно подставляют значения $x_1 = a, x_2 = a + dx, x_3 = a + 2dx, ..., x_n = (n-1)dx$, $(3 \le n \le 7)$ и определяют значения функции $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$.

3). Из полученных данных составляют ранговую систему последовательностей $n-$го порядка:

$$\begin{aligned}
k &= 1, \quad 2, ..., n \\
x_k &= a, a + dx, ..., b \\
y_k &= y_1, \quad y_2, ..., y_n \\
Vy_k &= Vy_1, \quad Vy_2, ..., Vy_n
\end{aligned}$$

$V^2 y_k = V^2 y_1, V^2 y_2, ..., V^2 y_n$

....

$d = d.....,d.......,...,d$

4). По этой ранговой системе составляется биномиальное уравнение

5). По формулам 7.8 - 7.13 биномиальное уравнение преобразуется в алгебраическое, а интеграл 1 в интеграл:

$$y_k = \int_1^n M(x)dx$$

Здесь $M(x)-$ алгебраический многочлен, $n-$ верхний предел интегрирования, взятый из ранговой системы.

Интеграл 2 решается по таблице интегралов.

6). Полученная величина y_x определённого интеграла 2 должна разделиться на величину $n-1$ и умножиться на разность пределов интегрирования:

$$y = \frac{y_x}{n-1}(b-a)$$

7). Эта величина у и есть искомый интеграл 1 от неберущегося интеграла.

Рассмотрим второй способ взятия неберущегося интеграла.

Построив ранговую систему в нашем примере, получили биномиальный многочлен

$$y_k = 0{,}375C_{k-1}^2 + 3{,}1875C_{k-1}^1 + 12$$

Это уравнение эквивалентно подинтегральному выражению $y = 3x^2$, поэтому берём от него интеграл, но не по x, а по k, и не с интервалом интегрирования $3-2=1$, а с интервалом $5-1=4$, диктуемыми построенной ранговой системой :

$$y = \int_1^5 y_k\,dk = \int_1^5 \left(0{,}375C_{k-1}^2 + 3{,}1875C_{k-1}^1 + 12\right)dk = 0{,}375\int_1^5 C_{k-1}^2 dk + 3{,}1875\int_1^5 C_{k-1}^1 dk + 12\int_1^5 dk\ .$$

В уравнениях такого типа кроется одна особенность: коэффициенты, стоящие перед интегралами, в нашем примере 0,375, 3,1875 и 12, всегда берутся из составленной системы ранговых последовательностей из столбца под номером $k=1$, а сами определённые интегралы для всех уравнений с данными интервалами интегрирования будут одинаковыми.

Например, для биномиального уравнения типа

$$y = aC_{k-1}^2 + bC_{k-1}^1 + c$$

определённые интегралы, например, $\int_1^5 C_{k-1}^2 dk$ как и у нашего уравнения, будут одинаковы и равны: $\int_1^5 C_{k-1}^2 dk = \int_1^5 \frac{(k-1)!}{1!2!(k-3)}dk = 0{,}5\int_1^5 (k^2-3k+2)dk = 0{,}5(\frac{k^3}{3} - \frac{3}{2}k^2 + 2k)_1^5 = 6{,}6666$

Определив определённые интегралы $\int_1^2, \int_1^3, \int_1^4, ... \int_1^{10}$, для каждого из них составляем таблицы (приложение 2, табл. 1-8). По этим таблицам и определяют числовые значения определённых интегралов с нижним индексом $1,2,...,n-1$.

Аналогично поступают и с другими биномиальными коэффициентами C_{k-1}^n. При постоянном n коэффициент k меняется от величины $n+1$, до 10 и для каждого из них строятся таблицы с известными интервалами интегрирования (приложение 2).

Покажем на примере как ими пользоваться. Продолжим решение нашего уравнения:

$$y=\int_1^5 ydk=\int_1^5\left(0,375C_{k-1}^2+3,1875C_{k-1}^1+12\right)dk=0,375\int_1^5 C_{k-1}^2dk+3,1875\int_1^5 C_{k-1}^1dk+12\int_1^5 dk=$$
$$=0,375\cdot 6,6666...+3,1875\cdot 8+12\cdot 4=76$$

В приложении 2 ищем таблицу под номером 3 биномиального коэффициента C_{k-1}^2 поскольку пределы интегрирования у него дают разность $5-1=4$, то в графе $b-1$ под номером 4 находим число 6,6666...Его и вставляем в решение уравнения.

Аналогично поступаем и с биномиальным коэффициентом C_{k-1}^1 . В табл. 2 под номером $b-1=5-1=4$ выбираем число 8, а в таблице 1 - число 4. В итоге получаем число 76.

Но это число 76 падает на $5-1=4$ интервала, а нам нужен один интервал, потому что в условии был задан интервал $3-2=1$. На один интервал приходится число: $76:4=19$. Это и есть искомый ответ от первоначального интеграла $y=3\int_2^3 x^2\,dx$.

Алгоритм 14.2 (биномиальный)

1). Совершаем действия $1\to 5$ алгоритма 14.1.

2) Берём определённый интеграл от полученного биномиального уравнения. Коэффициенты перед интегралами взяты из построенной ранговой системы. Интегралы от биномиальных коэффициентов берём из таблиц приложения 2.

3) Совершаем действия 6-7 алгоритма 14.1

Содержание.

Часть 1.

Часть 2.